Курс элементарной планиметрии

составил инженер Степанов А.В.

2023

УДК 514.112
ББК 22.151.0
С79

Для среднего школьного возраста

Степанов А.В.
С79 Курс элементарной планиметрии / Степанов А.В., Степанова Л.В. — Ангарск: [б. и.], 2023. — — 176 с.
ISBN 978-5-600-03555-3

Общеизвестно, что в геометрии нет царского пути, но перед отправлением в каждый новый путь мы стараемся взять с собой путеводитель, который избавил бы нас от блужданий по непримечательным местам. Этот курс возник как результат поиска «идеального путеводителя» по геометрии в том виде, каким его представлял составитель, когда был еще школьником. Авторы надеются, что после его прохождения читатель может смело браться за решение школьных задач по планиметрии любого уровня.

УДК 514.112
ББК 22.151.0

6+

ISBN 978-5-600-03555-3

Глава 1.

Первоначальные сведения

Необходимое вступление

Для решения задач и выполнения упражнений вам необходимы: чистый лист бумаги, карандаш, циркуль, линейка и ластик. Карандаш должен быть хорошо отточен. Если под рукой нет линейки, то вместо нее можно использовать другой карандаш или другой лист бумаги, сложенный несколько раз вдоль линии сгиба. Если нет циркуля, то его можно заменить плотной бумажной лентой. Кнопкой или булавкой делаете отверстие на краю ленты так, чтобы в нее проходило отверстие карандаша.

Чертежи выполняйте аккуратно. Если на одном листе бумаги выполнено несколько чертежей, то можете отделять их чертой, проведенной под линейку. Можете завести папку-скоросшиватель и подшивать в нее выполненные чертежи. Проставляйте на чертежах дату.

Не выполняйте чертежи на листах бумаги в клеточку: они облегчают рисование, но препятствуют пониманию изучаемого материала. Не пользуйтесь угольником и транспортиром. Место угольника на занятиях по техническому черчению, а транспортира на уроках по тригонометрии.

Если у вас возникают вопросы в процессе прохождения курса, то последовательно записывайте их в тетрадь. Попробуйте в конце курса самостоятельно дать на них ответы. Если вы не можете дать на них ответ, то обратитесь к справочной литературе или учителю.

Список использованной и рекомендуемой литературы:

1) Давидов А. Элементарная геометрия в объеме гимназического курса / Давидов А. — Москва: В университетской типографии (Катков и К^0), 1864. — 298 с.

2) Малинин А. Руководство геометрии и собрание геометрических задач для гимназий, реальных училищ и учительских институтов / Малинин А., Егоров Ф. — Москва: Издание книгопродавца Ф.И. Салаева, 1879. — 496 с.

3) Ройтман Дм. Курс элементарной геометрии с включением начал тригонометрии (плоской и сферической), изложенной по измененной системе и приспособленный для самостоятельного изучения / Ройтман Дм. — второе издание, значительно перераб. и дополн. — Москва: Типография Т-ва И.Д. Сытина, 1910. — 410 с.

4) Симашко Франц. Начальная геометрия / Симашко Франц. — изд. восьмое, испр. — С.-Петербург: В типографии Безобразова и Комп., 1887. — 348 с.

5) Шапошников А.Н. Курс начальной геометрии / Шапошников А.Н. — выпуск 1 — Москва: Университетская типография, на Страстном бульваре, 1906. — 116 с.

6) Шохор-Троцкий С.И. Геометрия на задачах / Шохор-Троцкий С.И. — Москва: Издание Т-ва И.Д.Сытина, 1909. — 344 с.

1.1. Предмет геометрии. Линия, прямая, отрезок, окружность

Пространство безгранично и обладает свойством безграничной делимости. Всякое природное тело занимает определенную часть пространства. Часть пространства, занимаемая природным телом, называется его объемом или геометрическим телом. Геометрические тела имеют границы и отличаются формой, величиной и положением. Границы тел называются поверхностями. Место встречи двух поверхностей называется линией. Место встречи двух линий — точка. Если линия проведена через точку (проходит через точку), то мы говорим: точка лежит на линии или точка принадлежит линии.

Сочетание определенных точек, линий, поверхностей и тел мы называем *фигурой*. Фигуры различаем по форме, величине и положению. *Исследование свойств фигур* — предмет геометрии. Пользуясь результатами этих исследований, мы можем устанавливать форму и положение фигур, выводить правила для определения геометрических величин: длин, величин углов, площадей, объемов.

Аксиома 1.1. *Целая величина больше каждой своей части и равна их сумме.*

Аксиома 1.2. *Если к двум равным величинам прибавить или отнять равные, то равенство не нарушится.*

Аксиома 1.3. *Если к двум неравным величинам прибавить или отнять равные, то неравенство не нарушится.*

Аксиома 1.4. *Мы можем менять положение фигур так, что форма и величина их не нарушатся.*

Аксиома 1.5. *Фигуры равны, если при наложении совмещаются.*

Пять предыдущих утверждений — *аксиомы*, мы признаем их истинность, не прибегая к ряду дополнительных рассуждений. Существуют и другие аксиомы. Утверждение, истинность которого устанавливается после ряда рассуждений, называется *теоремой*. Ряд рассуждений, приводящих к справедливости теоремы, называется ее *доказательством*.

Все наши дальнейшие рассуждения и определения будут касаться фигур, расположенных на одной плоской поверхности (плоскости). Геометрия на плоскости — *планиметрия*.

Практически каждый из нас имеет представление о прямой линии или просто *прямой*. Для изложения наших представлений о фигурах и их свойствах мы пользуемся предложениями и чертежами. Возьмите лист бумаги, карандаш и линейку. Карандашом на листе бумаги произвольно отметьте две точки. Две отмеченные точки мы считаем заданными. Плотно приложите край линейки к заданным точкам. Под край приложенной линейки карандашом проведите линию. Если мы возьмем хорошее увеличительное стекло и наведем фокус его на начерченную линию, то увидим, что черта имеет ширину. Прямая в геометрии — это линия, и она ширины не имеет. Чертеж лишь изображает воображаемые геометрические фигуры. Условимся, что линии на чертеже толщины не имеют.

Определение 1.1. *Прямая — неограниченная линия, которая вполне и однозначно определяется двумя своими точками.*

Теперь начертите вторую прямую так, чтобы она пересекалась с первой. Место встречи (пересечения) двух прямых — точка. Мы построили новую точку, которую обозначим буквой A. Мы говорим, что точка построена, если определили место встречи двух линий. Точки формы и величины не имеют. Точки обладают единственным свойством — положением, тогда и отличаются друг от друга только положением.

Геометрическим построением называем такое рассуждение, в котором последовательно воображаемые линии своим пересечением определяют точки искомой фигуры. Искомая фигура считается определенной, если определены ее точки, позволяющие отличить ее от других фигур. Точки совмещенных фигур не позволяют отличить эти фигуры друг от друга.

Утверждения, которые не принадлежат к аксиомам или доказанным теоремам, и в которых установлены свойства исследуемых фигур, мы определяем как *данные*, а фигуры, о которых ведется в них речь, считаем *заданными*.

Самостоятельно задайте две точки A и B и отметьте их на листе бумаги. С помощью карандаша и линейки проведите через них пять прямых. Если у вас это получилось, то еще раз перечитайте определение 1.1. Эта определение раскрывает основное свойство прямой: *через две точки можно провести прямую, и только одну.* Все пять проведенных линий являются одной и той же прямой. Если мы говорим о прямой, то называем ее любые две точки, например: «прямая AB». Для определения прямой достаточно двух точек. Для обозначения прямой можно использовать строчную букву латинского алфавита, например, «прямая a».

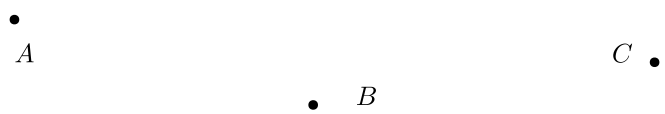
Решения задач по геометрии должны основываться на принятых аксиомах и доказанных теоремах. Решая геометрическую задачу, мы как выявляем новые свойства фигур, так и применяем уже известные свойства.

Задача 1.1. *Даны пересекающиеся прямые AB и CD (см. черт. 1.1). Найти на чертеже точку их пересечения.*

Чертеж 1.1. Пересечение двух заданных прямых.

Решение. Постойте, а где же прямые? У нас есть только точки A и B, C и D. Перенесите эти четыре точки себе на лист бумаги, пытаясь придерживаться их взаимного расположения. Навыки, приобретенные на уроках рисования, будут здесь весьма кстати. Прочтем определение 1.1 еще раз. Две точки каждой прямой у нас есть, значит, прямые определены. Что мешает нам с помощью линейки и карандаша провести прямые через точки A и B, а затем C и D? Проведем! Если продлим их достаточно хорошо, то найдем точку пересечения заданных прямых — точку E. Итак, *любую прямую мы можем всегда продлить.* При достаточном продлении прямые либо пересекутся, либо — нет. *Прямые пересекаются в одной точке.* Если бы прямые пересекались в двух точках, то через две точки можно было бы провести две различные прямые, а это противоречит основному свойству прямой: через две точки можно провести прямую, и только одну. □

Задача 1.2. *Даны точки A, B, C (см. черт. 1.2). Проведите через них одну прямую.*

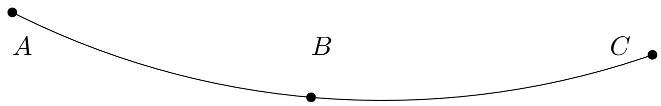


Чертеж 1.2. Три точки.

Решение. Перенесите эти три точки себе на лист бумаги. По определению 1.1 мы можем провести отдельную прямую через точки A и B, отдельную прямую через точки A и C, также можем провести прямую через точки B и C. Проведем! Очевидно, что мы провели три прямые, но по условию задачи нам нужна только одна.

Допустим, кто-то решил эту задачу, как на чертеже 1.3, и доказывает, что прямая проведена через три точки. Но с чего мы взяли, что точка B будет лежать на прямой AC? Вам могут предоставить лупу и убедиться лично, но чертеж в геометрии не может служить инструментом доказательства. Доказательства в геометрии строятся только путем рассуждения, а чертежи делают их наглядными. Попробуем порассуждать.

Для доказательства того, что точка B лежит на прямой AC



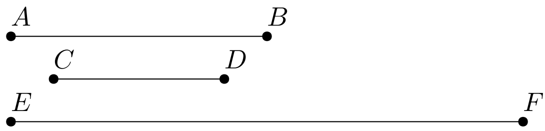
Чертеж 1.3. Попытка проведения прямой через три точки.

мы можем:
1) попытаться выяснить данные о положении точек;
2) сопоставить известные свойства точек, лежащих на одной прямой, со свойствами точек из задания;
3) если будет найдено соответствие, то произвести необходимые вычисления или построения, которые убедят в верности доказываемого утверждения. □

Очевидно, что задача дана с неполным условием, и для верного ее решения необходимо уточнить условие задачи.

Определение 1.2. *Отрезок — это часть прямой, которая ограничена двумя точками.*

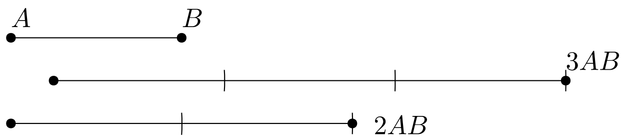
На чертеже (см. черт. 1.4) показаны три отрезка AB, CD и EF. Наименование отрезка составляется из наименований двух точек, являющихся его границами. Что можно сказать о данных отрезках? Они отличаются положением и величиной. Мы можем сказать какой из отрезков больше, а какой меньше. «Больше», «меньше» — это хорошо, но лучше, если бы мы знали: «насколько больше» или «насколько меньше»?



Чертеж 1.4. Три произвольных отрезка.

Чтобы сравнить отрезки по величине и узнать, насколько величина одного отличается от величины другого, нам понадобится новый отрезок, который будет целое число раз входить в каждый из сравниваемых отрезков. Величину отрезка мы будем называть его *длиной*.

Задача 1.3. *Дан отрезок AB (см. черт. 1.5). Постройте два новых отрезка так, чтобы величина одного была равна трем величинам отрезка AB, а другого — двум величинам заданного отрезка.*

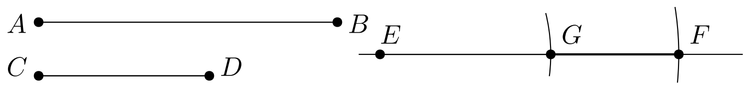


Чертеж 1.5. Откладывание отрезка AB.

Решение. Возьмем лист бумаги и проведем две произвольные прямые. *Расстояние от точки до точки — это длина отрезка с концами в этих точках.* Одну ножку циркуля аккуратно поставим на точку A, а вторую ножку — на точку B. С тем же раствором циркуля на первой начерченной прямой отметим одну засечку, затем поставим ножку на пересечение и отметим вторую засечку; поставим ножку на второе пересечение и отметим третью засечку. Каждую новую засечку мы ставим в том же направлении, что и предыдущую. Три длины отрезка AB отмечены. На второй прямой отметим таким же образом 2 засечки. Первый построенный отрезок равен $3 \cdot AB$, а второй — $2 \cdot AB$. Задача решена. □

Отрезок AB из предыдущей задачи является *общей мерой* двух новых отрезков. Его длина составляет третью часть первого построенного отрезка и половину второго построенного отрезка. Два новых отрезка являются *соизмеримыми*, так как их отношение выражается в целых числах и равно $\frac{3}{2}$.

Задача 1.4. *Найти разность двух данных отрезков AB и CD (см. черт. 1.6).*



Чертеж 1.6. Вычитание отрезков.

Решение. На листе бумаги проведем произвольную прямую. «Снимем» величину отрезка AB. Для этого острие циркуля поставим на точку A, а острие карандаша — на точку B. Не меняя раствора циркуля, поставим его острие в некоторой точке E проведенной прямой, и на ней же карандашом отметим «засечку» F. $AB = EF$. Аналогично «снимем» величину отрезка CD. Поставим острие циркуля в точку E, и отметим на прямой «засечку» G в направлении к точке F. $EG = CD$. $GF = AB - CD$. □

Исследование. Так как в нашем случае точка G оказалась между точками E и F, то это говорит о том, что отрезок CD меньше отрезка AB. Если бы точка G упала правее точки F, то отрезок

CD был бы больше отрезка AB. При равенстве отрезков AB и CD точки G и F слились бы в одну точку. Как вы думаете, если бы отрезок CD был точно равен половине отрезка AB, то были бы равны отрезки EG и GF? □

Если общая мера одного отрезка составляет m частей от него, а второго — n частей, то величины отрезков соотносятся как $\frac{m}{n}$.

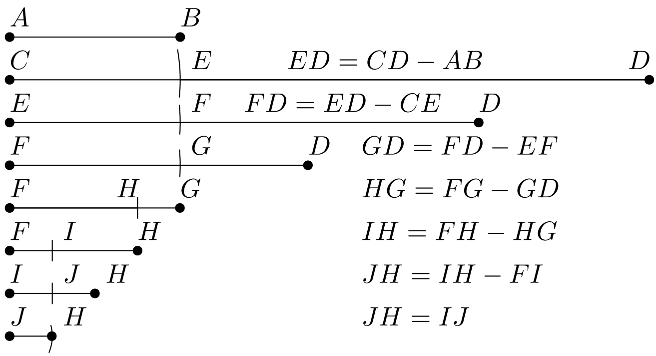
Задача 1.5. *Найти общую меру двух данных отрезков AB и CD (см. черт. 1.7).*

Чертеж 1.7. Два сравниваемых отрезка.

Решение. Эта задача немного сложнее. Алгоритм поиска общей меры двух отрезков впервые приведен в «Началах» Евклида. Сперва из большего отрезка мы вычитаем меньший, получаем остаток — это новый отрезок. Сравниваем остаток с вычитаемым, и из большего вычитаем меньшее. Продолжаем так до тех пор, пока разница между уменьшаемым и вычитаемым не станет равна нулю, тогда уменьшаемое (или вычитаемое) является общей мерой двух заданных отрезков. Отрезок JH является общей мерой для отрезков AB и CD (см. черт. 1.8).

Общая мера отрезков AB и CD была найдена за семь вычитаний. Если бы вычитания мы продолжали бесконечно долго, то это означает, что отрезки AB и CD *несоизмеримы.* Отношение между несоизмеримыми отрезками в целых числах выразить невозможно. Для удобства, вычитания отрезков показаны на разных прямых, однако каждое вычитание можно постоянно производить на бо́льшем отрезке. □

Длину всякого отрезка выражают как отношение к длине одного отрезка, принимаемого за эталон или единую меру. Для



Чертеж 1.8. Поиск общей меры двух отрезков AB и CD посредством последовательного вычитания.

этого длину эталона принимают за 1, и если общая мера эталона и сравниваемого с ним отрезка входит в эталон m раз, а в сравниваемый отрезок — n раз, то длина сравниваемого отрезка выражается как $\frac{n \cdot 1}{m}$ или $\frac{n}{m}$.

Измерить величину — значит найти её отношение к другой однородной величине, принимаемой за единую меру.

Упражнение для самостоятельного решения 1. *Порассуждайте: сколько прямых линий можно провести между 3, 4, 5, 6 … n точками, если каждые три точки не лежат на одной прямой? (МЕ 28.1).*[1] *Подсказка: подумайте сколько прямых можно провести из каждой точки, сколько точек всего, и сколько раз прямые повторяются? Догадка — первый шаг в построении цепочки рассуждений и единственный способ при решении незнакомой задачи. Не стесняйтесь применять ее!*

---

[1] Здесь и далее это обозначение указывает на то, что задача заимствована из «Руководства геометрии» А. Малинина и Ф. Егорова. Первое число до точки обозначает номер параграфа, а второе — номер задачи в параграфе.

Упражнение для самостоятельного решения 2. *На прямой в одном направлении отложены равные отрезки AB, BC, CD. Их длина равна a. Найти чему равна длина отрезка, который соединяет середины отрезков AB и CD. Середина отрезка — это точка на отрезке, которая находится на равном расстоянии от его концов.*

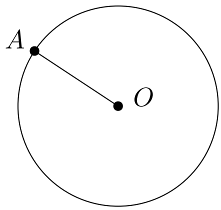
Упражнение для самостоятельного решения 3. *Дан некий отрезок AB. Дана точка C, лежащая на отрезке AB. Доказать, что расстояние от середины отрезка AB до точки C равно полуразности длин AC и BC (ME 28.13).*

Упражнение на открытом воздухе 1. *Возьмите три деревянных колышка длиной немногим меньше вашего роста. Выйдите на большую площадку. Поставьте вертикально первый колышек. Отойдите от него на пять шагов. Поставьте второй колышек. Условимся, что колышки обозначают точки. Мы помним, что через две точки можно провести прямую и только одну. Отойдите от второго колышка на расстояние 10 шагов так, чтобы место в котором он будет стоять было на одной прямой с двумя другими колышками. Для этого вам понадобится помощник. Он должен смотреть на первых два колышка так, чтобы при визировании они сливались в одну линию, третий колышек также должен сливаться с двумя другими. Вы построили прямую, проходящую через три точки.*

Если мы возьмем отрезок и один конец его сделаем неподвижным, а второй конец начнем вращать вокруг неподвижного, то вращающийся конец проведет замкнутую линию вокруг неподвижного центра. Такую линию мы называем *окружностью.*

Определение 1.3. *Окружность — это замкнутая линия, которая вполне и однозначно определяется двумя точками: центром и точкой на ней.*

Для построения окружностей на бумаге используется циркуль. Возьмите циркуль, поставьте одну ножку на лист бумаги (это будет центр окружности), а второй ножкой начертите линию подобную той, которая представлена на чертеже 1.9. Центр окружности принято обозначать буквой O. При постро-



Чертеж 1.9. Окружность и ее радиус.

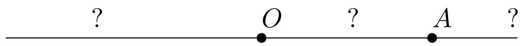
ении равных окружностей на бумаге достаточно одну ножку циркуля поставить на центр, а вторую на любую точку на линии окружности, тогда величина отрезка, соединяющего центр окружности с точкой на ней, будет «снята» раствором циркуля. С установленным раствором циркуля уже можно начертить другую окружность, равную первой. Окружности различаются по величине и положению.

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на ней, называется *радиусом*. Радиус окружности обычно обозначается буквой R (*radius*) или двумя буквами, обозначающими центр окружности и точку на ней. При построении окружности раствор циркуля не меняется, значит, мы можем утверждать, что все точки окружности равноудалены от центра, и это расстояние точно равно радиусу. Нужно помнить, что радиус — это отрезок, поэтому его также можно сравнивать с другими отрезками. Если по ходу решения задачи вы пришли к тому, что искомая точка удалена от заданной точки на известное расстояние, и вы не знаете где она находится, то смело проводите вокруг заданной точки окружность известного радиуса: искомая точка будет лежать на линии окружности. Для ее построения достаточно будет отыскать другую линию, которая будет пересекать линию построенной окружности.

Аксиома 1.6. *Прямая, проведенная через точку внутри окружности, пересекает её в двух точках.*

Проведем через центр любой окружности произвольную прямую. По аксиоме 1.6 она пересекает прямую в двух точках. Отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр, называется *диаметром.* Длина диаметра окружности равна двум радиусам.

Задача 1.6. *Дан центр окружности O и точка на линии окружности A. Найти вторую точку окружности, лежащую на прямой OA (см. черт. 1.10).*

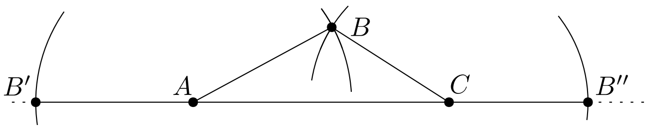


Чертеж 1.10. Поиск точки.

Решение. Постойте, а где линия окружности? Она нам не нужна. Нам достаточно того, что она уже определена: нам даны точка центра и точка на линии окружности. Понятно, что искомая точка будет находиться на прямой OA там, где прямая второй раз пересекает окружность. Если искомая точка будет находиться правее точки A, то у нас будет некоторая точка на окружности, расстояние до которой будет превышать величину радиуса, а таких точек быть не может. По этой же причине искомая точка не может находиться между точками O и A: здесь расстояние до искомой точки будет меньше радиуса.

Значит, искомая точка находится левее точки O, но где же? Еще раз перечитаем условие задачи. Прямая проходит через центр окружности, поэтому пересекает её в двух точках (по аксиоме 1.6). Что это за прямая? Это прямая, на которой лежит диаметр окружности! Диаметр равен двум радиусам, отрезок OA — радиус, значит, искомая точка лежит левее точки O на расстоянии, равном OA. Перенесите чертеж к себе на листок и отметьте искомую точку с помощью циркуля. Обозначьте ее как точка B. Отрезок OB равен отрезку OA по построению. □

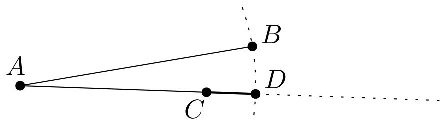
Задача 1.7. *Даны отрезки AB, AC, BC (см. черт. 1.11). Точка B не лежит на прямой AC. Найти отрезок, равный сумме отрезков AB, AC, BC.*



Чертеж 1.11. $B'B'' = AB{+}AC{+}BC$.

Решение. Продлим отрезок AC по обе стороны, и отложим величины отрезков AB и BC на прямой AC. Для этого поставим острие циркуля в точку A, а карандаш — в точку B, и проведем окружность радиусом AB. Построенная окружность пересечет прямую AC в двух точках. Мы обозначим одну точку B' так, чтобы точка A находилась между точками B' и C. $AB' = AB$ как радиусы одной окружности. Затем поставим острие циркуля в точку C, карандаш — в точку B, и проведем окружность радиусом CB. Построенная окружность пересечет прямую AC в двух точках. Обозначим точку B'' так, чтобы точка C находилась между точками A и B''. $CB'' = CB$ как радиусы одной окружности. Величина отрезка $B'B''$ равна $AB + AC + BC$. Отрезок $B'B''$ — искомый отрезок. □

Задача 1.8. *Даны отрезки AB и AC с общим концом A. $AB >$ $> AC$ (см. черт. 1.12). Найти их разность.*



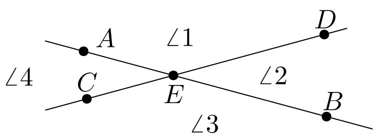
Чертеж 1.12. Поиск разности двух отрезков с общим концом.

Решение. Из точки C, в направлении от точки A, произвольно продлим отрезок AC. Поставим острие циркуля в общую точку A, а острие карандаша в точку B. Проведем окружность радиусом, равным AB. Окружность пересечет отрезок AC или его продолжение в точке D. CD — искомый отрезок. Так как $AB > AC$, то точка D лежит на продолжении отрезка AC. Мы могли бы также провести окружность радиусом AC и найти точку D на отрезке AB, тогда отрезок DB был бы искомым отрезком. □

Упражнение для самостоятельного решения 4. *Дан произвольный отрезок AB. Начертите две окружности. Центр первой окружности — точка A, радиус ее равен AB. Центр второй окружности — B, радиус ее равен BA. Равны ли построенные окружности?*

1.2. Угол. Серединный перпендикуляр

Продолжим исследование двух пересекающихся прямых AB и CD (см. черт. 1.13). Место пересечения данных прямых — точ-



Чертеж 1.13. Пересечение двух прямых в одной точке.

ка E. Не забываем, что прямые пересекаются только в одной точке. Точка E делит прямую AB на две полупрямые EA и EB, прямая CD делится этой же точкой на полупрямые ED и EC. *Полупрямая (луч)* — это часть прямой, которая ограничена одной точкой. Из точки E выходят четыре полупрямые: EA, ED, EB, EC. Подумайте: если в одной точке пересекаются три прямые, то сколько полупрямых из неё выходит?

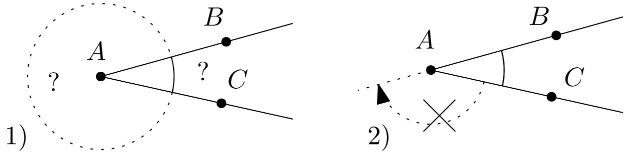
Пересекающиеся прямые AB и CD образовали четыре угла. Первый угол образован полупрямыми EA и ED, второй — ED и EB, третий — EB и EC, четвертый — EC и EA.

Определение 1.4. *Угол — это фигура, определяемая двумя полупрямыми, выходящими из одной точки.*

Вместо слова «угол» часто ставят значок $\angle$ (читают: «угол»). На чертеже 1.13 мы можем отметить все четыре угла: $\angle AED$, $\angle DEB$, $\angle BEC$, $\angle CEA$. Углу принято давать наименование по трем точкам: первая точка — точка на одном из лучей, вторая точка — точка из которой два луча выходят, третья точка — точка на втором луче. Лучи, составляющие угол, есть его стороны, а точка, из которой они выходят, называется вершиной. $\angle DEB$ и $\angle BED$ — есть один и тот же угол, мы только поменяли порядок двух точек, лежащих на его сторонах. Вершина угла в его наименовании всегда ставится посередине. Можно именовать угол и по одной вершине, если нет двух и более углов с этой же вершиной.

Посмотрите на углы AED и DEB. Что вы можете о них сказать? Как думаете, какой из них больше, а какой меньше? Может они равны? Давайте разберемся в этом вопросе.

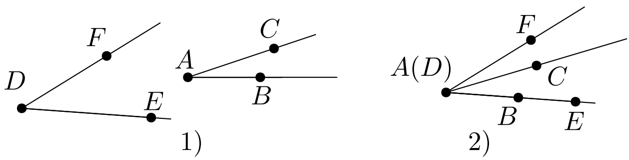
Угол устанавливает область, не поддающуюся измерению. Ее называют внутренней областью угла и отмечают на чертеже дугой у его вершины. Что если на чертеже не указана внутренняя область угла (см. черт. 1.14(1))? О какой области тогда ведется речь: о той, что отмечена сплошной дугой, или о той, что отмечена пунктирной дугой? Для решения этого вопроса мысленно



Чертеж 1.14. Определение внутренней области угла.

выполняем следующие действия: 1) дополняем до прямой любую сторону угла; 2) другую сторону вращаем вокруг вершины по движению часовой стрелки; 3) если вращаемая сторона совпадет сперва с неподвижной стороной, то за внутреннюю область угла принимается пройденная вращаемой стороной область; но если сперва происходит совпадение с дополнением неподвижной стороны, то вращение нужно производить против движения часовой стрелки (черт. 1.14(2)). Внутренняя область угла BAC отмечена сплошной дугой. Никаких «мысленных вращений» производить не нужно, если дугой явно указана внутренняя область угла. Равные углы на чертеже помечаются равным числом дуг.

Два угла мы называем равными, если они при наложении



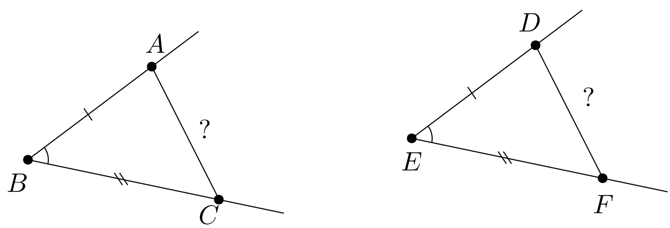
Чертеж 1.15. Наложение двух углов.

совмещаются. Это справедливо, так как справедлива аксиома 1.5. При наложении одного угла на другой величина их не меняется, и это справедливо по аксиоме 1.4. На чертеже (см. черт. 1.15(1)) показаны два угла BAC и EDF. Мы привели оба угла к такому положению, что вершины (A и D) у них совпали, луч

AB совпал с лучом DE, но луч AC не совпал с лучом DF: он проходит во внутренней области угла EDF (черт. 1.15(2)). На основании этого принимаем то, что величина угла EDF больше величины угла BAC или $\angle EDF > \angle BAC$. Вы можете спросить: каким способом наложили углы BAC и EDF на черт. 1.15(2)? Для этого нам нужно научиться строить угол, равный данному.

Теорема 1.1. *Если на сторонах одного угла от вершины отложить произвольные отрезки, и такие же отрезки отложить от вершины другого угла, равного первому, а концы отрезков соединить в каждом угле между собой, то соединяющие отрезки будут равны между собой.*

Доказательство. Текст теоремы достаточно большой: что же нам требуется доказать? Возьмем два равных угла с вершинами B и E (черт. 1.16). На стороне первого от вершины B с помощью



Чертеж 1.16. Равны ли отрезки?

циркуля отметим произвольный отрезок AB. С тем же раствором циркуля от вершины E второго угла отметим отрезок DE. Отрезки равны по построению. Равные отрезки отмечаем равным числом засечек на них. Таким же способом построим равные отрезки CB и FE на двух других сторонах равных углов. Нам требуется доказать, что отрезок AC равен отрезку DF. Чертеж немного прояснил условие теоремы, поэтому не пренебрегайте черчением.

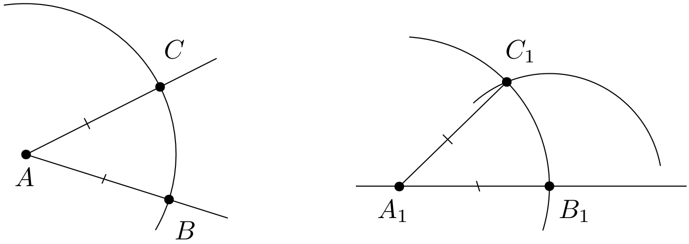
По аксиоме 1.4 мы можем переместить один угол так, что его вершина совпадет с вершиной другого угла. Двигаем угол DEF. Повернем весь угол так, чтобы луч EF совпал с лучом BC. Точка F совпадет с точкой C, так как отрезки BC и EF равны. Угол DEF также образован и лучом ED, а так как $\angle DEF = \angle ABC$, то по аксиоме 1.5 луч ED совпадет с лучом BA. Точка D совпадет с точкой A, так как отрезки BA и ED равны. Значит, точки D и A — одна точка, точки F и C — одна точка, а через две точки мы можем провести только одну прямую. Отрезок DF совместился с отрезком AC. $DF = AC$ (аксиома 1.5). Теорема доказана.

Если вам сложно понять доказательство этой теоремы, то выполните следующее: возьмите лист просвечивающей бумаги, наложите его на черт. 1.16; перерисуйте карандашом углы ABC и DEF; ножницами вырежьте два уголка и наложите один на другой. Отрезки против углов должны совместиться. Вырезание нельзя использовать как доказательство, но оно проясняет нам его содержание. □

Воспользуемся только что доказанной теоремой для построения равных углов.

Задача 1.9. *Постройте угол, равный заданному.*

Решение. Дан угол с вершиной в точке A. Поставим ножку циркуля на точку A и проведем произвольную окружность. Она пересечет стороны угла в точках B и C (черт. 1.17). Отрезки AB и AC равны по построению, так как являются радиусами одной окружности. Проведем произвольную прямую. «Снимем» с помощью циркуля величину отрезка AB, с этим же раствором поставим ножку циркуля на новую прямую и проведем окружность так, чтобы она пересекла прямую. Получим две точки: точку A_1 — точку, на которой была закреплена ножка циркуля или центр окружности, и B_1 — точку пересечения окружности с новой прямой. Отрезок A_1B_1 равен отрезку AB по построению. «Снимем» с помощью циркуля величину отрезка BC. Поставим



Чертеж 1.17. Построение угла, равного заданному.

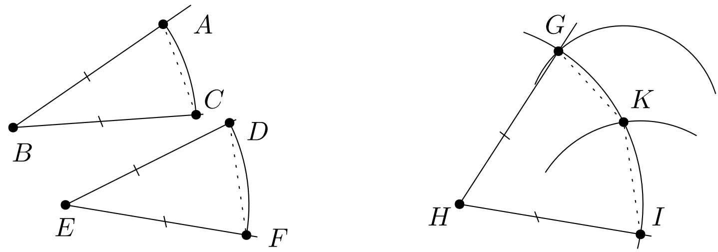
ножку циркуля на точку B_1 и «снятым» раствором циркуля проведем окружность. Получим точку пересечения двух окружностей — C_1. Отрезок B_1C_1 равен отрезку BC по построению, A_1C_1 равен AC как радиусы равных окружностей. Угол CAB равен углу $C_1A_1B_1$. Построение выполнено.

Постойте, постойте! — воскликните вы, — ваше построение основано на другой теореме, которая должна звучать примерно так: если соответствующие отрезки, отложенные от вершины одного угла, равны соответствующим отрезкам отложенным от вершины другого угла, и равны отрезки, проведенные через концы каждого из отложенных отрезков, то углы, лежащие напротив проведенных отрезков, равны.

Совершенно верно. Наше построение опирается на другую теорему. «Другую» теорему мы докажем чуть позже, а на практике будем пользоваться приведенным способом построения равных углов. Кстати, это достаточно распространенная ошибка, когда цепочка суждений при доказательстве опирается на ошибочно выбранную теорему. □

Задача 1.10. *Найдите сумму двух заданных углов.*

Решение. Пусть нам даны два угла (см. черт. 1.18). Возьмем циркуль и проведем две равных окружности с центрами в точках B и E. Стороны углов будут пересечены в точках F и D, C и A.



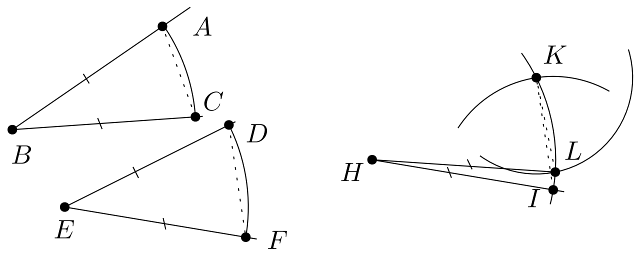
Чертеж 1.18. Сложение двух углов.

$EF = ED = BC = BA$ по построению как радиусы равных окружностей. Сперва построим угол, равный $\angle DEF$. Для этого воспользуемся способом, изложенным в предыдущей задаче: проведем произвольную прямую, «снимем» раствором циркуля величину EF, поставим ножку циркуля на новой прямой, проведем окружность, получим отрезок HI, который будет равен отрезку EF; «снимем» циркулем величину DF, поставим ножку циркуля в точку I, проведем окружность, получим место пересечения двух окружностей — точку K. $\angle KHI$ равен $\angle DEF$. Отрезок KH равен отрезкам CB и CA по построению. «Снимем» циркулем величину отрезка AC, поставим ножку в точку K, проведем окружность. Новая окружность пересечет первую (с центром в точке H) в двух точках. Какую точку нам выбрать? Чтобы попасть из точки I в точку K, двигаясь по линии окружности внутри угла KHI, нам необходимо идти против хода часовой стрелки. Направление хода из точки K не меняем. Найдем точку G. Отрезок KG равен отрезку AC по построению. $\angle KHG$ равен $\angle ABC$. Новый угол GHI равен сумме $\angle GHK$ и $\angle KHI$, а так как $\angle KHI = \angle DEF$ и $\angle GHK = \angle ABC$, то $\angle GHK = \angle ABC + \angle DEF$. Задача решена. □

Задача 1.11. *Найдите разность двух заданных углов.*

Решение. Прочтите решение предыдущей задачи, в которой мы находили сумму двух углов. Из точки I в точку K мы шли против хода часовой стрелки (см. черт. 1.18), затем, *не меняя направления обхода*, пришли из точки K в точку G. Если бы мы желали найти разность двух углов, то нам стоило в точке K *поменять направление обхода* (идти в новую точку не против хода часовой стрелки, а по ходу часовой стрелки). Мы тогда придем в точку L (см. черт. 1.19).

$$\angle LHI = \angle KHI - \angle KHL = \angle DEF - \angle ABC.$$

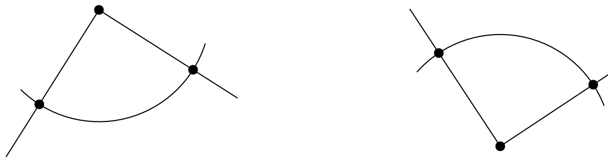


Чертеж 1.19. Разность двух углов.

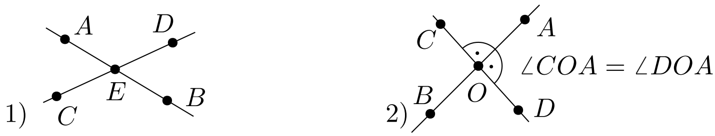
Разность двух заданных углов даст нам ответ на вопрос какой угол больше, а какой меньше. Чтобы узнать «насколько», для этого необходимо найти их общую меру или сравнить с единой угловой мерой, о которой будет сказано далее. □

Упражнение для самостоятельного решения 5. *На чертеже 1.20 даны два угла. Перенесите себе их на листок бумаги, найдите их сумму и разность. Для перенесения угла достаточно построить ему равный угол.*

Теперь вернемся к пересечению двух прямых в одной точке, изображенных на чертеже 1.21(1).



Чертеж 1.20. Найти сумму и разность углов.



Чертеж 1.21. Пересечение двух прямых в одной точке.

Определение 1.5. *Смежные углы — это два угла с общей вершиной и стороной, где две другие стороны составляют одну прямую.*

Две полупрямые EB и EA составляют одну прямую, сторона ED — общая сторона у углов AED и DEB. Углы AED и DEB — смежные углы. Перечислим другие смежные углы: $\angle DEA$ и $\angle AEC$, $\angle AEC$ и $\angle CEB$, $\angle CEB$ и $\angle BED$. Всего имеем четыре пары смежных углов. Что будет, если одна прямая пересечет другую так, что в одной из пар смежных углов углы будут равны друг другу (см. черт. 1.21(2))?

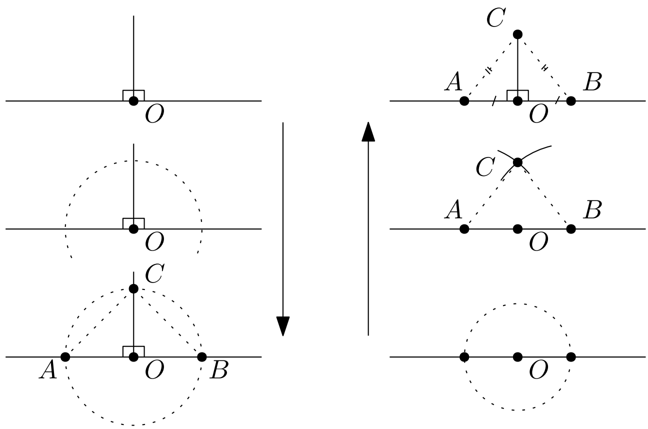
Определение 1.6. *Прямой угол — это каждый из двух равных смежных углов.*

Две прямые, которые при пересечении образуют прямые углы, мы называем перпендикулярными. Если прямая AB перпендикулярна прямой CD, то пишут так: $AB \perp CD$. *Перпендикуляр к данной прямой* — это отрезок прямой, перпендикулярной данной прямой, одним концом которого является точка пересечения перпендикулярных прямых. Точка пересечения перпендикулярных прямых — *основание перпендикуляра.* На чертеже 1.21(2) показан $\angle COA$, который является смежным с $\angle DOA$, и $\angle COA = \angle DOA$. AO — перпендикуляр к прямой CD в точке O, точка O — основание перпендикуляра AO. Восстановить перпендикуляр из точки на данной прямой — значит провести через точку прямую, перпендикулярную данной, и на проведенной прямой определить перпендикуляр.

Задача 1.12. *Из точки на прямой восстановите перпендикуляр с помощью циркуля и линейки.*

Предварительные размышления. Сложная задача? Такие задачи можно пробовать решить так: 1) считаем, что задача решена; 2) аккуратно выполняем чертеж решенной задачи; 3) вспоминаем свойства начерченных фигур; 4) их можно обнаружить, если продлить линии или построить окружности, так как при новых пересечениях «проявляются» новые точки; 5) если свойства выявлены, то решаем задачу в обратном порядке, при этом не забываем проверять теоремы, на которые будет опираться решение задачи.

Приведем ход «черновых» построений. На чертеже 1.22 они показаны слева. Выберем произвольную точку на прямой. Назовем ее точкой O. Проведем от руки перпендикуляр из этой точки. Второй конец перпендикуляра пока не обозначаем. Отмечаем прямые углы. На чертеже прямой угол отмечается «маленькой подпоркой», проставленной при вершине. Можно обозначить и одной дугой, но под ней необходимо поставить точку. Почему бы не провести окружность произвольного радиуса вокруг точки O? Проведем! Отметим три точки пересечения A, C и B. Отрезок CO — восстановленный перпендикуляр из точки O к прямой AB. Построим отрезки AC и BC. Углы COA и COB — смежные и прямые углы, $OA = OB = OC$ по построению, тогда по теореме 1.1 $AC = BC$. Попробуем развернуть решение задачи в порядке, обратном «черновым» построениям. □



Чертеж 1.22. Восстановление перпендикуляра из точки на прямой.

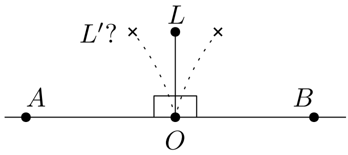
Решение. Проведем вокруг выбранной точки O на прямой окружность (см. черт. 1.22, справа). Она пересечет прямую в двух точках A и B, эти точки будут равноудалены от центра. С бо́льшим раствором циркуля проводим две окружности одного радиуса с центрами в построенных точках. Две равные окружности пересекутся в некоторой точке C (объяснение этому будет дано далее). $AO = BO$ как радиусы одной окружности, $AC = BC$ как равные радиусы двух окружностей. Точки C и O равноудалены от точек A и B. Если бы мы доказали тот факт, что точки, равноудаленные от концов отрезка, лежат на перпендикуляре к этому отрезку, то наша задача была бы решена. Следует признать, что это утверждение будет доказано в теореме 1.4, поэтому условно призна́ем то, что CO — перпендикуляр к AB в точке O.[2] □

[2]Для решения этой задачи мы применили аналитический метод, известный со времен греческого философа Платона. Суть аналитического метода

Аксиома 1.7. *Все прямые углы равны между собой.*[3]

Теорема 1.2. *По одну сторону прямой через любую ее точку можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.*

Доказательство. Даны прямая AB и точка O на ней. Точка O лежит между точками A и B (см. черт. 1.23). Восстановим пер-



Чертеж 1.23. Перпендикуляр OL, восстановленный из точки O к прямой AB.

пендикуляр OL из точки O на прямой AB по одну ее сторону. Углы AOL и BOL — смежные и прямые ($\angle AOL = \angle BOL$). В ту же сторону, в которую восстанавливали перпендикуляр OL к прямой AB, восстановим перпендикуляр OL' из точки O на прямой AB так, что $OL' = OL$. Углы AOL' и BOL' — смежные и прямые ($\angle AOL' = \angle BOL'$).

Допустим, полупрямая OL' не совпадает с полупрямой OL, тогда прямой угол $\angle AOL'$ не совмещается с прямым углом AOL. Так как углы не совмещаются, то по аксиоме 1.5 мы можем утверждать, что $\angle AOL' \neq \angle AOL$. Это утверждение противоречит аксиоме 1.7. Наше допущение о том, что полупрямая OL

состоит в том, что мы предполагаем задачу решенной и чертим фигуру, которая приблизительно удовлетворяет условиям задачи. Рассматривая ее и проводя вспомогательные линии, ищем новую фигуру, которую мы сможем построить по данным задачи.

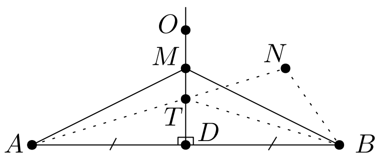
[3]Эта аксиома является четвертым постулатом в «Началах» Евклида. Люди, изучавшие геометрию на протяжении двух тысяч лет, принимали равенство прямых углов за очевидную истину, и только в XVIII веке нашли, что этот постулат можно вывести из других аксиом и постулатов. В этом курсе мы не доказываем это утверждение как теорему, а принимаем его за аксиому.

не совпадает с полупрямой OL' — ошибочно. Остается признать, что полупрямая OL совпадает с полупрямой OL', и точка L совпадает с точкой L' (так как $OL = OL'$), а через две точки мы можем провести только одну прямую.[4] □

Прямой угол принимается за единую меру других углов. Величина прямого угла обозначается буквой d (с франц. *droit* — прямой).

Аксиома 1.8. *Отрезок короче всех других линий, соединяющих его концы.*

Теорема 1.3. *Всякая точка перпендикуляра, восстановленного из середины отрезка, равноудалена от его концов, а всякая точка, не находящаяся на перпендикуляре, не отстоит на равном расстоянии от концов отрезка.*



Чертеж 1.24. Геометрическое место точек, равноудаленных от середины отрезка.

Доказательство. Из точки D, являющейся серединой отрезка AB, восстановлен перпендикуляр DO (см. черт. 1.24). Возьмем произвольную точку M на перпендикуляре DO. Так как $MD = DM$, $\angle MDA$ и $\angle MDB$ — смежные и прямые углы, $AD = DB$

[4]Мы применили такой способ рассуждения, как *доказательство от противного.* При этом способе делается предположение, противоположное тому, которое нужно доказать. Этот способ называется еще приведением к невозможности, так как сделанное предположение приводит к выводу, от которого стоит сразу же отказаться по причине его невозможности. К этому способу мы будем прибегать и в дальнейшем.

по условию, то по теореме 1.1 $AM = BM$. Первая часть теоремы доказана.

Через произвольную точку T на перпендикуляре DO и точку A проведем прямую. Отметим на прямой AT точку N, не лежащую на DO. $NA = NT + TA$, по аксиоме 1.8 $NB < NT + TB$. По первой доказанной части имеем: $TA = TB$, значит, $NB < NT + TA$, то есть $NB < NA$. □

Перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка, называется *серединным перпендикуляром.*

Теорема 1.4. *(Обратная теореме 1.3)*[5] *Всякая точка, равноудаленная от двух концов данного отрезка, лежит на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка, а всякая не равноудаленная не лежит.*

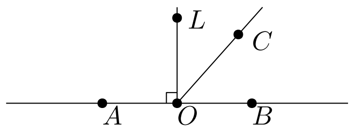
Доказательство. Если бы допустили обратное, то пришли бы к заключению, что точка, взятая вне перпендикуляра, восстановленного из середины отрезка, равноудалена от его концов, а точка на перпендикуляре не равноудалена. Это заключение противоречит теореме 1.3, тогда допущение ошибочно. □

При решении таких задач, в которых требуется провести линию, все точки которой обладают определенным свойством, говорят: «найти геометрическое место точек, обладающих данным свойством». Например, окружность есть геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что ее точки всегда равноудалены от центра. Перпендикуляр, проведенный через середину отрезка, есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка.

Теорема 1.5. *Сумма смежных углов равна двум прямым углам.*

[5] Пусть, A — условие, а B — следствие. Если текст теоремы звучит как: «*Если верно A, то верно B*», то текст теоремы *обратной* звучит как: «*Если верно B, то верно A*».

Доказательство. На произвольной прямой отметим точки A, B и O. Точка O лежит между точками A и B. Восстановим перпендикуляр из точки O. Отметим на нём точку L. Во внутренней области одного из прямых углов отметим точку C. Через точки O и C проведем прямую (см. черт. 1.25). Углы COB и COA



Чертеж 1.25. Сумма смежных углов равна двум прямым углам.

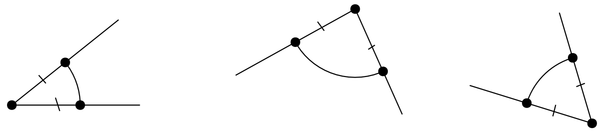
— смежные углы. Найдем их сумму. Допустим, что $\angle COB <$ $< \angle LOB$.
$\angle COB = \angle LOB - \angle LOC$;
$\angle COA = \angle LOA + \angle LOC$;
$\angle COB + \angle COA = (\angle LOB - \angle LOC) + (\angle LOA + \angle LOC) = \angle LOB +$ $+ \angle LOA = d + d = 2d$.

К такому же выводу придем и при условии $\angle COB > \angle LOB$. Теорема доказана. □

Следствия.
1) Если два угла равны, то равны и их смежные углы.
2) Если смежные углы разделены на несколько углов, то сумма всех частей равна двум прямым углам. □

Упражнение для самостоятельного решения 6. *Даны три угла (см. черт. 1.26). Найдите их сумму.*

Решая предыдущую задачу, вы могли заметить, что сумма углов получилась равна двум прямым, и сторона первого угла лежит на одной прямой со стороной последнего прибавляемого угла.

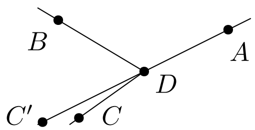


Чертеж 1.26. Найти сумму углов.

Теорема 1.6. *Если два угла имеют общую вершину и одну общую сторону, и их сумма равна двум прямым углам, то две другие стороны лежат на одной прямой.*

Доказательство. Даны два угла BDA и BDC, вершины углов совпадают, сторона BD — общая, $\angle BDA + \angle BDC = 2d$.
Допустим, что стороны DC и DA не лежат на одной прямой. Дополним полупрямую DA до прямой. Пускай луч DC' лежит внутри угла BDC (см. черт. 1.27).

Углы BDA и BDC' — смежные углы. По теореме о смежных

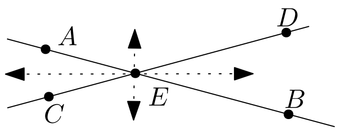


Чертеж 1.27. Когда раздельные стороны углов с общей вершиной и стороной лежат на одной прямой?

углах 1.5: $\angle BDA + \angle BDC' = 2d$. По условию нашей теоремы: $\angle BDA + \angle BDC = 2d$.

Тогда $\angle BDA + \angle BDC' = \angle BDA + \angle BDC$ или $\angle BDC' = \angle BDC$. Полупрямая DC' совмещается с полупрямой DC, а это значит, что стороны DC и DA лежат на одной прямой. К аналогичному выводу мы придем если допустим то, что луч DC' не будет лежать внутри угла BDC. Теорема доказана. Следует отметить, что эта теорема будет справедлива для суммы не только двух, но и n углов. □

Снова посмотрим на пересечение двух прямых (см. черт. 1.28).

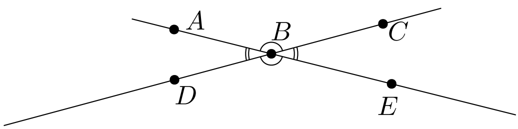


Чертеж 1.28. Пересечение двух прямых в одной точке.

Определение 1.7. *Вертикальные углы — это два угла, у которых стороны одного служат продолжением сторон другого.*

На чертеже 1.28 углы AED и CEB — вертикальные. Также, углы AEC и DEB — вертикальные.

Теорема 1.7. *Вертикальные углы равны между собой.*



Чертеж 1.29. Вертикальные углы равны между собой.

Доказательство. Посмотрите на чертеж 1.29. Докажем, что $\angle ABC = \angle DBE$.
$\angle ABC$ и $\angle CBE$ — смежные углы, значит, по теореме 1.5 $\angle ABC + \angle CBE = 2d$.

Так как углы $\angle DBE$ и $\angle CBE$ также смежные, то справедливо и это равенство: $\angle DBE + \angle CBE = 2d$.

Значит, $\angle ABC + \angle CBE = \angle DBE + \angle CBE$ или $\angle ABC = \angle DBE$.

Аналогично доказывается и справедливость следующего равенства: $\angle ABD = \angle CBE$. □

Упражнение для самостоятельного решения 7. *Постройте две пересекающиеся прямые. Обозначьте все углы, образованные пересекающимися прямыми. С помощью циркуля и линейки найдите сумму обозначенных углов. Чему она равна?*

Задача для самостоятельного решения 1. *По одну сторону прямой AB построены углы $AOC = \frac{2}{3}d$, $COD = \frac{1}{12}d$, $DOE = \frac{3}{4}d$ и еще 4 равных между собой угла. Определите величину каждого из последних углов (ME 43.13).*

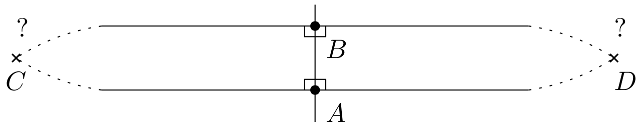
Задача для самостоятельного решения 2. *Под каким углом пересекаются прямые, делящие пополам каждый из смежных углов (ME 43.18)?*

Задача для самостоятельного решения 3. *Угол AOB разделен пополам прямой OF. Доказать, что продолжение этой прямой разделит пополам угол, вертикальный данному (ME 43.28).*

Задача для самостоятельного решения 4. *Порассуждайте. Если к половине угла мы добавим его четверть и еще добавим восьмую часть, и еще добавим шестнадцатую часть, и еще добавим тридцать вторую часть, и так до бесконечности, то составит ли сумма всех частей целый угол? Подсказка: найдите в справочной литературе, чему равна сумма бесконечного ряда чисел: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$*

1.3. Перпендикуляр и наклонная

На данной прямой AB даны две точки. По левую сторону от прямой мы восстановили к ней два перпендикуляра из двух данных точек. Как вы думаете, восстановленные перпендикуляры при достаточном продолжении могут пересечься? Допустим, они пересекаются в некоторой точке C (см. черт. 1.30). Из тех же

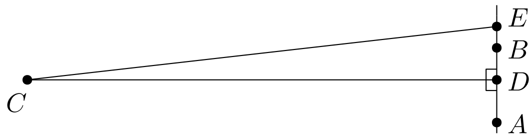


Чертеж 1.30. Перпендикуляры, восстановленные из двух точек на одной прямой, пересекутся?

точек восстановим перпендикуляры к данной прямой по другую ее сторону. Так как по нашему допущению пересеклись первые перпендикуляры, то ничто не мешает пересечься и двум другим перпендикулярам, допустим, в точке D. Углы CAB и DAB имеют общую вершину A, общую сторону AB и их сумма равна двум прямым, тогда по теореме 1.6 получаем, что CD — одна прямая, проходящая через точку A; аналогично приходим к заключению, что DC — другая прямая, проходящая через точку B. Выходит, что через две точки D и C мы провели две различные прямые, а это противоречит определению 1.1. Наше предположение о том, что два перпендикуляра, восстановленных из двух точек на одной прямой, пересекаются — неверно. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1.8. *Две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются.*

Мы говорим, что из точки C опущен перпендикуляр CD на прямую AB, если прямая, проведенная через точку C, пересекает прямую AB в точке D под прямым углом (см. черт. 1.31). Точка D — основание перпендикуляра CD. Любой другой отрезок, соединяющий точку C и точку на прямой AB, отличную от точки D, называется *наклонной*. Отрезок CE — наклонная,



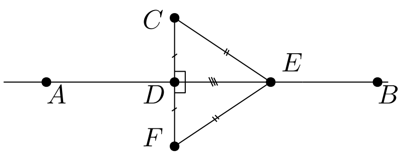
Чертеж 1.31. Перпендикуляр и наклонная

опущенная из точки C на прямую AB. Точка E — основание наклонной CE.

Теорема 1.9. *Из точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.*

Доказательство. Если бы можно было опустить два и больше перпендикуляров, то получилось бы, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, пересекаются, а это противоречит доказанной теореме 1.8. □

Теорема 1.10. *Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче всякой наклонной, опущенной из той же точки на ту же прямую.*

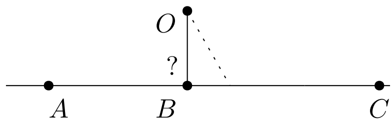


Чертеж 1.32. Перпендикуляр короче всякой наклонной.

Доказательство. На прямую AB из точки C опустим перпендикуляр с основанием в точке D и наклонную с основанием в точке E (см. черт. 1.32). Продлим CD и отметим точку F так, что $CD = DF$. Соединим точку F с точкой E. $\angle FDE = \angle CDE$,

так как является смежным с прямым углом, $CD = DF$ по построению, DE — общий отрезок, тогда по теореме 1.1 $CE = FE$. По аксиоме 1.8 $CF < CE + FE$.
$\frac{1}{2}CF < \frac{1}{2} \cdot (CE + FE)$. $\frac{1}{2}CF = CD$, а половина суммы длин наклонных: $\frac{1}{2} \cdot (CE + FE) = \frac{2}{2} \cdot CE = CE$. В итоге: $CD < CE$. □

Обратно. Если некий отрезок OB есть наименьший отрезок, который можно провести из точки O к AC, то прямая OB перпендикулярна AC (см. черт. 1.33). Если бы это было не так, то мы могли бы из точки O опустить перпендикуляр, который по теореме 1.10 должен быть меньше любого другого отрезка. Между тем, мы условились, что OB — наименьший отрезок, тогда $OB \perp AC$. На этом основании, *за расстояние от точки до прямой принимается длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.* □

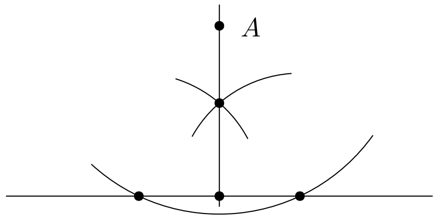


Чертеж 1.33. Если наименьший, то перпендикулярен?

Задача 1.13. *Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Опустите перпендикуляр из точки на прямую.*

Решение. Считаем, что задача решена. Перпендикуляр опущен, тогда от основания перпендикуляра, по обе его стороны, можем отметить равные отрезки. Концы этих отрезков по теореме 1.3 будут равноудалены от любой точки перпендикуляра.

Ставим ножку циркуля на данную точку и проводим окружность так, чтобы она пересекала прямую в двух точках. Это возможно по аксиоме 1.6. Из каждой новой точки, с раствором циркуля, бóльшим длины построенного отрезка, проводим по окружности. Они пересекутся (это факт будет доказан далее). Находим точку пересечения окружностей. Точка пересечения и заданная точка равноудалены от концов отрезка по построению, по теореме 1.4 они лежат на перпендикуляре. Проводим прямую через данную точку и построенную точку (см. черт. 1.34). Нахо-

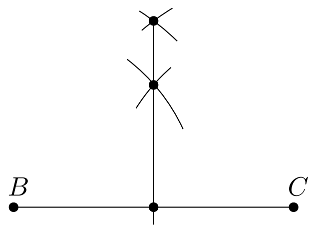


Чертеж 1.34. Опускаем перпендикуляр из точки на прямую.

дим основание перпендикуляра. Перпендикуляр построен. □

Задача 1.14. *Произвольный отрезок разделить пополам (найти середину отрезка).*

Решение. От нас требуют на произвольном отрезке найти точку, равноудаленную от его концов. Здесь нам пригодятся те самые теоремы и аксиомы, на которые опиралось решение прошлой задачи. Единственное, нам не дана точка, лежащая на перпендикуляре. Не страшно, ведь нам известны ее свойства. Она равноудалена от концов отрезка. Построим ее с помощью двух пересекающихся окружностей одного радиуса с центрами в концах отрезка. Вторую точку построим аналогично первой, но будем использовать окружности другого радиуса. Мы построили две точки, равноудаленные от концов отрезка, а две точки вполне определяют прямую. Проведя прямую через эти две точки, найдем точку пересечения с заданным отрезком. Мы опустили перпендикуляр на заданный отрезок, который делит его пополам (см. на черт. 1.35). □

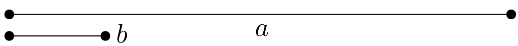


Чертеж 1.35. Деление отрезка BC пополам.

Упражнение для самостоятельного решения 8. *Произвольный отрезок разделите на четыре равные части. Подсказка: сначала разделите его на две части, а потом каждую половинку пополам.*

Упражнение для самостоятельного решения 9. *Провести окружность через две данные точки данным радиусом. Положение точек и величину радиуса задайте самостоятельно.*

Упражнение для самостоятельного решения 10. *Дан отрезок a, равный сумме отрезков AB и CD. Дан отрезок b, равный разности отрезков AB и CD (см. черт. 1.36). Постройте*



Чертеж 1.36. Сумма и разность двух отрезков.

отрезки AB и CD. Если вы оказались в затруднении, то подумайте, какой величине равна разность двух равных отрезков?

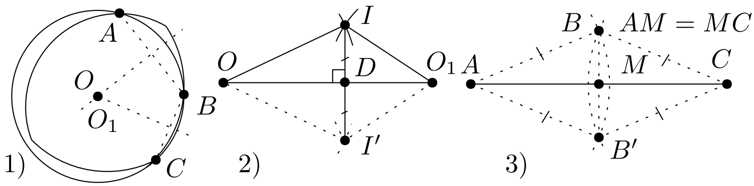
1.4. Взаимное положение окружностей, прямой и окружности

Теорема 1.11. *Две окружности не могут иметь три общие точки. Если две окружности имеют хоть одну общую точку вне линии центров этих окружностей, то они имеют и другую общую точку по другую сторону линии центров, и только одну.*

Доказательство. Предположим, что две окружности с центрами в точках O и O_1 имеют три общие точки A, B и C (см. черт. 1.37(1)). $OA = OB = OC$ как радиусы одной окружности, и $O_1A = O_1B = O_1C$ как радиусы другой окружности. По теореме 1.4 точки O и O_1 одновременно лежат на двух серединных перпендикулярах, восстановленных к отрезкам AB и BC, а так как две прямые, на которых лежат перпендикуляры, могут иметь только одну общую точку, то точки O и O_1 — одна точка. По определению 1.3 окружности с центрами в точках O и O_1 — одна окружность, так как точки, определяющие эти окружности, совмещены.

Даны две окружности с центрами в точках O и O_1. Прямую, проходящую через центры двух окружностей, мы называем *линией центров.* OO_1 — линия центров, точка I — точка, принадлежащая обеим окружностям. Нам нужно доказать, что существует другая точка, принадлежащая обеим окружностям по другую сторону линии центров, нужно найти ее и доказать, что она единственная (см. черт. 1.37(2)).

Опустим перпендикуляр ID из общей точки I на линию центров OO_1. Продлим отрезок ID. От точки D по другую сторону линии центров отложим отрезок DI', равный ID. $IO_1 = I'O_1$ и $IO = I'O$ по теореме 1.3, так как отрезки O_1D и OD — серединные перпендикуляры к отрезку II'. Так как точка I' удалена от центра O на то же расстояние, что и точка I, то она лежит на линии окружности с центром в точке O. Аналогично точка I' лежит и на линии окружности с центром в точке O_1. Точка I' — вторая общая точка двух окружностей по другую сторону



Чертеж 1.37. 1) Могут ли две окружности иметь три общие точки? 2) Две общих точки по обе линии центров. 3) Деление отрезка AC пополам.

линии центров, а так как две окружности не могут иметь три общие точки, то она единственная. □

Следствие. Две окружности не могут иметь две общие точки по одну сторону линии центров. □

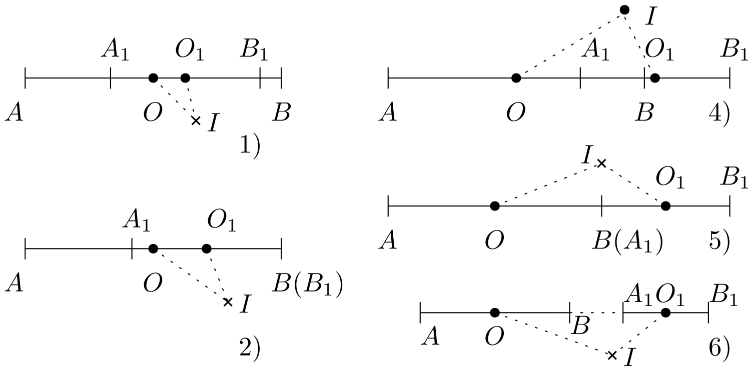
Если окружности имеют две общие точки, то мы говорим, что они *пересекаются* в этих точках.

Опираясь на теорему 1.11, мы можем воспользоваться другим способом поиска середины отрезка. Для этого нам достаточно из двух концов заданного отрезка провести окружности одного радиуса так, чтобы они пересекались. По теореме 1.4 точки пересечения двух равных окружностей лежат на двух серединных перпендикулярах, проведенных к данному отрезку. Так как у отрезка может быть только одна середина, то по теореме 1.6 серединные перпендикуляры лежат на одной прямой. Тогда отрезок, концы которого лежат в местах пересечения равных окружностей, делит заданный отрезок пополам (см. черт. 1.37(3)).

Аксиома 1.9. *Если линия одной окружности проходит через две точки, и одна из них лежит внутри другой окружности, а другая — нет, то окружности пересекаются.*

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения окружностей (см. черт. 1.38). Обозначим центр одной окружности как O, а другой — O_1, линия центров — OO_1. Диаметр первой окружности, который лежит на линии центров, обозначим как AB, тогда $AO = BO$; диаметр второй окружности, лежащий на линии центров, — A_1B_1, тогда $A_1O_1 = B_1O_1$.

1. Отрезок A_1B_1 полностью лежит внутри отрезка AB, при-



Чертеж 1.38. Линия центров и взаимное расположение отрезков диаметров окружностей.

чем так, что концы отрезков не совпадают, значит, $OB > O_1B_1$. Окружности имеют общие точки?

Допустим, что существует общая точка I двух окружностей. Тогда $OI < OO_1 + O_1I$, так как отрезок всегда короче любой линии соединяющей его концы (аксиома 1.8). $OI = OB$ — радиус одной окружности, $O_1I = O_1B_1$ — радиус другой окружности. Получаем следующее неравенство: $OB < OO_1 + O_1B_1$ или $OO_1 > OB - O_1B_1$. По условию $OB > O_1B_1$, тогда верно равенство $OB = OO_1 + O_1B_1 + B_1B$ или $OB - O_1B_1 = OO_1 + B_1B$. Из неравенства $OO_1 > OB - O_1B_1$ и равенства $OB - O_1B_1 = OO_1 + B_1B$ получаем, что $OO_1 > OO_1 + B_1B$. Мы пришли к нелепому выводу. Значит, окружности общих точек не имеют.

2. Отрезок A_1B_1 совпадает только одним из своих концов с

любым концом отрезка AB (пускай это будет точка B), а другой конец лежит внутри отрезка AB. Очевидно, что у окружностей есть одна общая точка $B(B_1)$, которая лежит на линии центров OO_1. Есть ли вторая общая точка I? Повторяя рассуждения как и для первого случая, мы придем к тому, что $OB < OO_1 + O_1B_1$, а по нашему условию $OB = OO_1 + O_1B_1$. Мы приходим к противоречию. Значит, окружности имеют только одну общую точку на линии центров и для этого случая верно равенство: $OB = OO_1 + O_1B_1$ или $OO_1 = OB - O_1B_1$.

3. Отрезки A_1B_1 и AB полностью совмещаются, тогда окружности совмещаются.

4. Один конец отрезка A_1B_1 лежит на отрезке AB, а другой лежит снаружи окружности с центром в точке O. Согласно аксиоме 1.9 окружности пересекаются, а по теореме 1.11 существуют две точки пересечения окружностей. Рассмотрим одну из них, точку I. Здесь верно следующее неравенство: $OO_1 < OI + O_1I$ или $OO_1 < OB + O_1B_1$ по аксиоме 1.8. Также верно неравенство $OI < OO_1 + O_1I$ или $OO_1 > OB - O_1B_1$ по той же аксиоме.

5. Отрезки имеют только одну общую точку B (она же точка A_1) на линии центров OO_1. Могут ли окружности иметь две общие точки? Допускаем существование второй точки I. Рассуждая аналогично первому случаю, мы придем к тому, что $OO_1 < OI + O_1I$ или $OO_1 < OB + O_1A_1$. Это допущение ошибочно, так как по условию $OO_1 = OB + O_1A_1$. Значит, окружности имеют только одну общую точку на линии центров, и условие существования этой точки: $OO_1 = OB + OB_1$.

6. Отрезки AB и A_1B_1 не имеют общих точек. Предположим, что окружности имеют общую точку I, тогда будет верно неравенство: $OO_1 < OI + O_1I$. Это невозможно, так как по условию $OO_1 > OI + O_1I$, а с учетом того, что $OB = OI$ и $O_1A_1 = O_1I$, получаем: $OO_1 > OB + O_1A_1$. Значит, окружности общих точек не имеют.

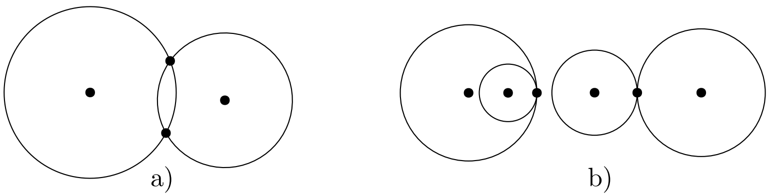
Обозначим радиус бо́льшей окружности OB как R, радиус меньшей окружности O_1B_1 как r, расстояние между центрами двух окружностей OO_1 как l. Окружности пересекаются, когда:

$$\begin{cases} l < R + r \\ l > R - r \end{cases} \tag{1.1}$$

Окружности имеют одну общую точку на линии центров (*касаются*), когда:

$$l = R + r \text{ или } l = R - r. \tag{1.2}$$

Так как мы рассмотрели все возможные случаи расположения окружностей, то будут справедливы и обратные утверждения. Не пытайтесь «зазубрить» предыдущие выкладки. Для нас важен результат в формулах 1.1 и 1.2. Выкладки опирались на аксиомы 1.8 и 1.9.

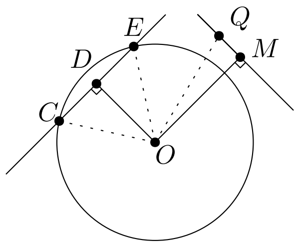


Чертеж 1.39. Примеры пересекающихся (a) и касающихся (b) окружностей.

Теорема 1.12. *Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то прямая лежит за линией окружности; если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса — прямая пересекает окружность.*

Доказательство. Предположим, что расстояние OM от центра окружности до прямой больше радиуса (см. чертеж 1.40). Расстояние от точки до прямой — это перпендикуляр, опущенный из точки на прямую. Любая точка на прямой, например Q, будет основанием наклонной. А так как перпендикуляр короче наклонной по теореме 1.10, то все точки прямой MQ будут находится на расстоянии, превышающем радиус окружности. Значит, окружность с центром O и прямая MQ общих точек не имеют.

Если расстояние OD к другой прямой меньше радиуса окружности, то точка D находится внутри окружности. Поэтому прямая CE пересечет окружность в двух точках (по аксиоме 1.6). □

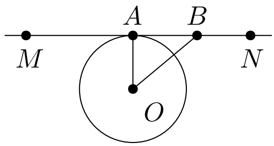


Чертеж 1.40. Положения прямых и окружности.

Определение 1.8. *Касательная к окружности — это прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.*

Теорема 1.13. *Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

Доказательство. Прямая MN — касательная к окружности в точке A. A — точка касания (см. черт. 1.41). Какую бы точку B мы не взяли на прямой MN, OA будет меньше OB, так как OA равен радиусу окружности, а все остальные точки на MN лежат за линией окружности. OA — кратчайший отрезок, который может соединять центр окружности и точку на прямой MN. По теореме, обратной 1.10: $OA \perp MN$. □



Чертеж 1.41. Касательная к окружности.

Теорема 1.14. *Перпендикуляр, восстановленный к радиусу в конечной его точке на окружности, лежит на касательной к окружности в этой точке.*

Доказательство. Пусть OA — радиус окружности, MA и NA — перпендикуляры, восстановленные к радиусу OA по обе его стороны в точке A (см. черт. 1.41). Возьмем произвольную точку B. OB — наклонная, опущенная из точки O. По теореме 1.10: какую бы точку B мы не взяли, всегда справедливо неравенство $OB > OA$, значит, мы не найдем такой второй точки, чтобы отрезок OB был равен радиусу окружности. $\angle OAM + \angle OAN = 2d$, сторона OA у этих углов общая, поэтому перпендикуляры MA и NA лежат на одной прямой MN. Прямая MN имеет с окружностью только одну общую точку, значит, является касательной к ней. $\square$

Следствия доказательств трех предыдущих теорем:
1) К данной точке на окружности можно провести только одну касательную;
2) Прямая будет касательной к окружности, если расстояние от центра окружности к прямой равно радиусу, и обратно;
3) Прямая не может иметь с окружностью более двух общих точек.

Контрольное упражнение 1. [6]
1. Найдите общую меру двух данных отрезков, см. черт.

[6] Не переходите к изучению следующих тем, пока самостоятельно не решите все задания в этом упражнении.

1.42(1).

2. Найдите сумму и разность данных углов, см. черт. 1.42(2).

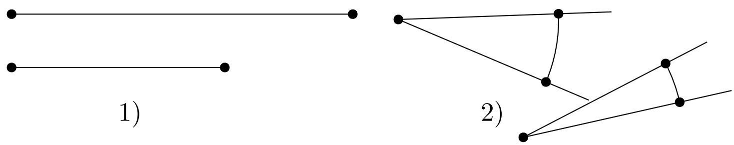
3. Произвольные прямые AB и CD пересекаются в точке E. Какой величине равна сумма углов: $\angle AEC + \angle CEB + \angle BED + \angle DEA$?

4. Дан произвольный отрезок AB. Принимая AB за диаметр окружности, начертите линию окружности.

5. Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Постройте окружность с центром в данной точке так, чтобы прямая была касательной к окружности.

6. В этом задании обязательно отложите линейку. Его нужно решать только с помощью циркуля и не на бумаге в клеточку. Итак, даны две произвольные точки. Построить третью точку так, чтобы все три лежали на одной прямой. Линейкой можете только проверить результат.

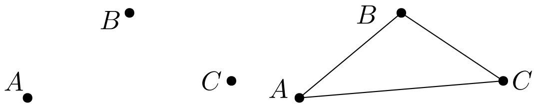
7. Если две окружности имеют общую точку на линии центров, то они имеют в этой точке общую касательную. Докажите.



Чертеж 1.42. К контрольному упражнению 1.

1.5. Треугольник. Биссектриса

Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (см. черт. 1.43). Проведем отрезки AB, BC, AC. Мы построили геометрическую фигуру, которую называем треугольником. Пишем



Чертеж 1.43. Произвольный треугольник.

«треугольник ABC» или $\triangle ABC$. Отрезки AB, BC и AC — стороны треугольника; $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ — его три угла.

Определение 1.9. *Треугольник — это плоская замкнутая фигура, которая ограничена тремя прямыми.*

Плоской замкнутой прямолинейной фигурой называем часть плоскости, ограниченную со всех сторон прямыми. У каждой замкнутой прямолинейной фигуры на плоскости будет столько углов, сколько сторон. Поэтому фигуру, ограниченную тремя сторонами, называют треугольником.

Элементы треугольника — три стороны и три угла. Вершины трех углов треугольника — это вершины треугольника. Треугольник вполне и однозначно определен, если определены его вершины. Стороны и углы треугольника находятся в некоторых соотношениях между собой, и эти соотношения составляют свойства фигуры. Попробуем выявить эти свойства.

По аксиоме 1.8 $AC < AB + BC$. Это же мы можем сказать о стороне AB: $AB < AC + BC$. Условившись, что $AB > BC$, последнее неравенство запишем так: $AC > AB - BC$. Если $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ и $a > b$:

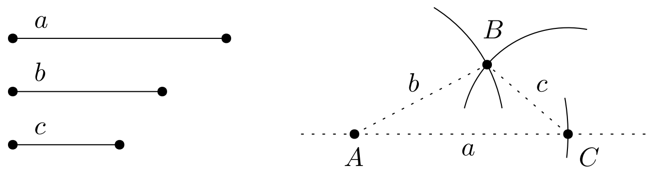
$$\begin{cases} c < a + b \\ c > a - b \end{cases}$$

Получено условие существования или возможности любого треугольника. Мы хотим построить треугольник по трем заданным сторонам, поможет ли нам это условие? Сопоставим только что найденное условие с формулой 1.1 на стр. 45, которая раскрывает условие пересечения окружностей:

$$\begin{cases} c < a + b \\ c > a - b \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} l < R + r \\ l > R - r \end{cases}$$

Стоит только принять длину одной стороны за расстояние между центрами двух окружностей, длину второй стороны — за радиус одной окружности, длину третьей — за радиус другой окружности, тогда в месте пересечения окружностей получим третью точку (первые две точки — центры двух окружностей). По трем точкам построим треугольник.

Задача 1.15. *Построить треугольник по трем заданным сторонам (см. черт. 1.44).*



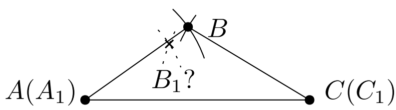
Чертеж 1.44. Построение треугольника по трем заданным сторонам.

Решение. Проведем произвольную прямую. Циркулем «снимем» величину a и на проведенной прямой построим отрезок AC. $AC = a$. Из центра A проведем окружность радиусом b. Из центра C проведем окружность радиусом c. Находим точку B в месте пересечения построенных окружностей. $AB = b$, $BC = c$. Построение выполнено. □

Могло случиться так, что окружности не пересеклись бы, значит, не выполняется условие существования треугольника (или условие пересечения окружностей), иными словами, треугольник с заданными сторонами не существует. Хорошо, а если мы построим два треугольника с одними и теми же сторонами, треугольники будут равны? Геометрия отвечает на свои вопросы доказательствами. Докажем наше предположение!

Теорема 1.15. *Если три стороны одного треугольника равны порознь трем сторонам другого, то треугольники равны.*[7]

Доказательство. Итак, нам дан треугольник ABC (см. черт. 1.45). Существует такой треугольник $A_1B_1C_1$, что $AB =$



Чертеж 1.45. К «третьему» признаку равенства треугольников.

$= A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Наложим один треугольник на другой так, чтобы точки A и A_1 совместились, точка C_1 совместилась с точкой C (это возможно, так как $AC = A_1C_1$), а точка B_1 лежала по одну сторону от прямой AC вместе с точкой B. Допустим, точки B и B_1 не совпадают. Если примем AC за линию центров двух окружностей с центрами в точках A и C и радиусами $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$ соответственно, то выходит, что две окружности пересекаются в двух разных точках по одну сторону от линии центров. По следствию теоремы 1.11 это невозможно. Точка B_1 тогда совпадет с точкой B, отрезки AB и A_1B_1 совместятся (так как через две точки можно провести только одну прямую), отрезки CB и C_1B_1 также совместятся. Треугольники совместятся, значит, они равны. □

Следствие. В равных треугольниках напротив соответственно равных сторон лежат равные углы. Это объясняется весьма про-

[7] «Третий» признак равенства треугольников.

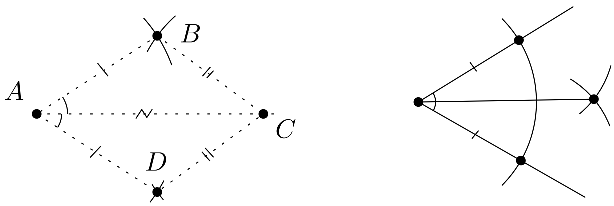
сто: при наложении равных треугольников, углы совместятся. □

Доказанная теорема является той самой теоремой, которой нам не хватало для обоснования решения в задаче 1.9 на стр. 22.

Задача 1.16. *Разделить произвольный угол пополам.*

Решение. Как здесь быть? Мы умеем складывать и вычитать углы. Но как разделить угол на две равные части? Давайте повторим процесс построения треугольника.

Мы смотрим на пересечение окружностей только по одну сторону, но окружности пресекаются в двух точках, по обе стороны от линии центров (см. черт. 1.46). Давайте рассмотрим вторую точку пересечения — точку D. $\triangle ABC = \triangle ADC$, так как $AB =$



Чертеж 1.46. Деление угла пополам.

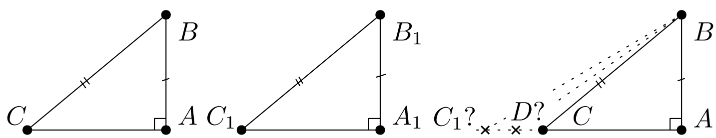
$= AD$, $BC = CD$, AC — общая сторона. В равных треугольниках напротив соответственно равных сторон лежат равные углы, значит, $\angle BAC = \angle CAD$. При этом $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, то есть $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle CAD$. Прямая AC делит угол на два равных угла. Теперь мы можем вывести алгоритм деления угла пополам: 1) одним раствором циркуля отмечаем равные отрезки на сторонах угла; 2) другим раствором циркуля из каждой новой точки как из центра проводим две равные окружности (величина второго раствора циркуля должна быть больше половины расстояния между точками на сторонах угла); 3) соединяем точку пересечения окружностей и вершину угла прямой. □

Определение 1.10. *Биссектриса угла — это полупрямая, которая выходит из вершины угла и делит его пополам.*

Упражнение для самостоятельного решения 11. *Дан отрезок длиной a.*[8] *Построить три отрезка, длины которых равны:* $3a$, $4a$, $5a$. *Построить треугольник со сторонами длиной:* $3a$, $4a$, $5a$. *Принимая сторону треугольника с длиной* $5a$ *за диаметр окружности, постройте на ней окружность.*

Треугольник, у которого один угол равен прямому углу — *прямоугольный треугольник.* В прямоугольном треугольнике может быть только один прямой угол, так как если мы допустим существование второго прямого угла, то из точки на прямую можно будет опустить два перпендикуляра, а это неверно. В прямоугольном треугольнике две стороны прямого угла называются *катетами*, а сторона, лежащая напротив прямого угла, — *гипотенуза.* По теореме 1.10 любой катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.

Теорема 1.16. *Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и гипотенузе другого, то треугольники равны.*



Чертеж 1.47. Равенство прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.

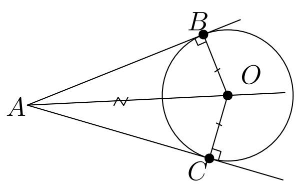
Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (см. черт. 1.47), у которых AB и A_1B_1 — равные катеты, а BC

[8] Величина a — всего лишь неопределенная мера. Определите ее самостоятельно.

и B_1C_1 — равные гипотенузы. Наложим один треугольник на другой так, чтобы совместились стороны AB и A_1B_1, а точки C и C_1 лежали по одну сторону от прямой AB. Так как прямые углы A и A_1 совмещаются, то точки C и C_1 будут лежать на одной полупрямой AC, по одну сторону от AB. Допустим, точки C и C_1 не совпадают. Тогда из середины отрезка CC_1, точки D, восстановим перпендикуляр. По теореме 1.4 точка B будет лежать на восстановленном перпендикуляре, так как $BC = BC_1$ по условию. Значит, из точки B на прямую AC опущены два перпендикуляра BD и BA, а это невозможно. Остается принять только то, что точки C и C_1 совпадают. Вершины углов совместились, треугольники совместились, значит, они равны. □

Задача 1.17. *В произвольный угол впишите произвольную окружность.*

Решение. Окружность называют вписанной в угол, если она лежит внутри угла и касается его сторон. Если она касается двух прямых, то радиусы искомой окружности в точках касания перпендикулярны касательным. Считаем задачу решенной и «набросаем» следующий черновой чертеж 1.48. Окружность с центром в точке O вписана в угол BAC. Посмотрим на



Чертеж 1.48. Полупрямая AO — биссектриса угла BAC?

треугольники OBA и OCA. Они — прямоугольные. $\angle OBA$ и $\angle OCA$ — прямые углы. Катет OB одного треугольника равен катету OC другого, так как они являются радиусами одной окружности. Гипотенуза OA у них общая. $\triangle OBA = \triangle OCA$, так как у них равны катеты и гипотенузы (см. теорему 1.16). Из равенства треугольников вытекает равенство соответствующих углов: $\angle OAB = \angle OAC$. Полупрямая AO делит угол BAC на две равные части, значит, она является биссектрисой угла.

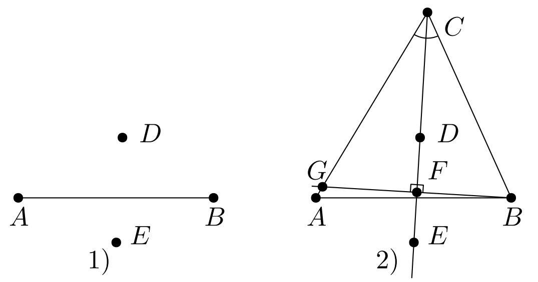
Алгоритм решения задачи: 1) поделить угол пополам; 2) на биссектрисе угла выбрать любую точку; 3) из выбранной точки опустить перпендикуляр на любую из сторон; 4) провести окружность, центром которой будет выбранная точка на биссектрисе, а точкой окружности — основание перпендикуляра.

Из решения этой задачи следует то, что *отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.* □

Используя решение предыдущей задачи, докажите следующее утверждение: если точка внутри угла равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе угла. Биссектриса угла — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. Какая прямая будет совпадать с биссектрисой угла величиной $2d$?

Задача 1.18. *Дана только одна сторона AB треугольника ABC. Даны точки D и E, через которые проходит биссектриса угла ACB. Найти точку C и построить треугольник ABC.*

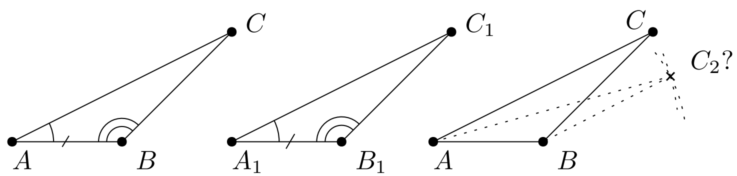
Решение. На чертеже 1.49(1) показано условие задачи. Как всегда, если не знаем как решить задачу, то считаем, что задача решена. Проводим прямую DE, произвольно выбираем точку C. Соединяем отрезками точки A и C, B и C (см. черт. 1.49(2)). Картина не проясняется. Что же, будем искать новые точки. Из точки B или из точки A опустим перпендикуляр на прямую CE так, чтобы основание перпендикуляра F оказалось внутри треугольника ABC. Продлим перпендикуляр до пересечения с одной из сторон треугольника, в нашем случае это сторона AC. Найдем точку пересечения G. У нас появились два прямоугольных треугольника CFG и CFB. У этих прямоугольных треугольников



Чертеж 1.49. Построение треугольника по стороне и биссектрисе противоположного угла.

общий катет CF, а угол FCB равен углу FCG, так как полупрямая CE — биссектриса угла ACB. Может, прямоугольные треугольники CFG и CFB равны? Отложим решение задачи и докажем теорему. □

Теорема 1.17. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.*[9]



Чертеж 1.50. Равенство треугольников по стороне и прилежащим к ней углам.

[9] «Второй» признак равенства треугольников.

Доказательство. Даны $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Нужно доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. черт. 1.50). «Снимем» величину отрезка A_1B_1 и отложим ее на прямой AB от точки A в сторону точки B. $AB = A_1B_1$, значит, точки B и B_1 совпадут. Проведем две окружности в сторону точки C от прямой AB с центрами в точках A и B и радиусами A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Окружности пересекутся в точке C_2. Построенный треугольник ABC_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по трем сторонам, значит, $\angle C_2AB = \angle C_1A_1B_1$. $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$ по условию. Следовательно, $\angle C_2AB = \angle CAB$, углы совмещаются, а полупрямые AC_2 и AC сливаются. Аналогично $\angle C_2BA = \angle C_1B_1A_1 = \angle CBA$, и полупрямые BC_2 и BC — одна полупрямая. Так как прямые AC и BC пересекаются только в одной точке, то точки C и C_2 — одна точка. Треугольник ABC_2 совместился с треугольником ABC, а так как он равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. □

Продолжение решения задачи 1.18 на стр. 55. Снова рассмотрим два прямоугольных треугольника CFB и CFG (см. черт. 1.49). У них $\angle CFB = \angle CFG = d$, $\angle GCF = \angle BCF$, катет CF — общий. Эти треугольники равны по теореме 1.17. Тогда сторона BF равна стороне GF. Точки A и G лежат на одной прямой AC.

Задача решается таким образом: 1) проводим прямую DE; 2) опускаем перпендикуляр из точки B на эту прямую — получим основание перпендикуляра в точке F; 3) продлим отрезок BF; 4) отложим отрезок $FG = FB$; 5) проведем прямую через точки A и G; 6) если прямая AG пересечет прямую DE в точке C (это надо доказать), то искомый треугольник будет построен.

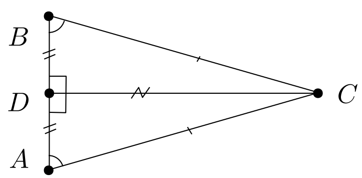
Вы можете отметить, что если бы точка A слилась с точкой G, то мы не смогли бы построить прямую. В этом случае точку C мы могли взять в любом месте прямой DE, кроме места пересечения отрезков DE и AB. □

Так как прямоугольные треугольники CFB и CFG из задачи 1.18 равны, то у них равны и гипотенузы CB и CG, но стороны CG и CB являются также сторонами треугольника CGB. Треугольник, в котором две стороны равны, называется *равнобедренным или равнобоким.* Две равные стороны называют *боковыми* сторонами, а третью сторону — *основанием.* В равнобедренном треугольнике CGB стороны CG и CB — боковые стороны, а сторона GB — основание.

Высота треугольника — это перпендикуляр, опущенный из вершины угла на противоположную сторону или ее продолжение. Противоположная сторона называется *основанием треугольника.*

Биссектриса треугольника — это отрезок, лежащий на биссектрисе угла треугольника, концами которого являются вершина угла и точка на противолежащей стороне.

Теорема 1.18. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны (против равных сторон лежат равные углы).*



Чертеж 1.51. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Доказательство. Дан равнобедренный треугольник ABC (см. черт. 1.51), AC и BC — боковые стороны, $AC = BC$. AB — основание равнобокого треугольника. Нам нужно доказать, что $\angle CBA = \angle CAB$.

Из середины стороны AB, точки D, восстановим перпендикуляр. По теореме 1.4 точка C будет лежать на восстановленном перпендикуляре. Треугольники BDC и CDA — прямоугольные и равны по трем сторонам, так как гипотенуза BC равна гипотенузе AC из условия теоремы, катет DB равен катету DA по построению, а DC — общий катет. Угол CBD равен углу CAD. $\angle CBA = \angle CAB$. □

Следствие. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная из угла при вершине[10] на основание, является биссектрисой треугольника, и обратно. □

Теорема 1.19. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.*[11]

Доказательство. По теореме 1.1 третьи стороны у таких треугольников тоже равны, а так как порознь равны три стороны, то по теореме 1.15 треугольники равны. □

Следствие. Если в прямоугольных треугольниках катеты одного треугольника равны катетам другого, то треугольники равны, так как прямой угол одного равен прямому углу другого. □

Итак, треугольники равны, если:
1) три стороны одного равны порознь трем сторонам другого;
2) две стороны и угол между ними одного равны двум сторонам и углу между ними другого;
3) сторона и два прилежащих к ней угла одного равны соответственно стороне и двум прилежащим углам другого.

Прямоугольные треугольники равны, если:
1) катеты одного равны катетам другого;
2) катет и гипотенуза одного равны соответственно катету и гипотенузе другого.

---

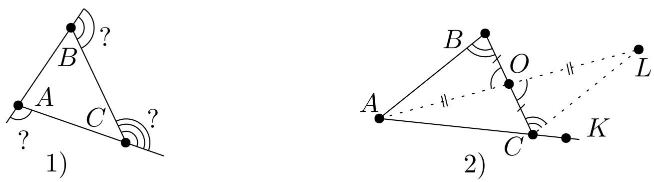
[10] Угол при вершине в равнобедренном треугольнике — угол образованный боковыми сторонами.

[11] «Первый» признак равенства треугольников.

1.6. Соотношения между углами и сторонами треугольника. Параллельные прямые.

Мы нашли соотношение между сторонами треугольника, при котором он существует. Теперь попробуем найти соотношение между углами треугольника. Вспомним тему смежных углов. Каждый угол треугольника будет меньше $2d$. Углы треугольника называют еще внутренними углами треугольника. Что мы можем сказать об углах, смежных с внутренними углами треугольника (см. черт. 1.52(1))? Углы, смежные с внутренними углами треугольника, мы называем *внешними углами треугольника.*

Теорема 1.20. *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним.*



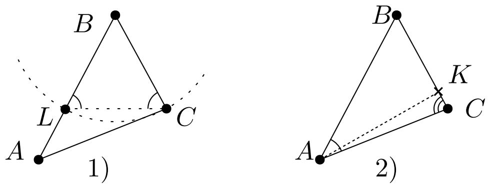
Чертеж 1.52. Внешний угол треугольника.

Доказательство. Дан треугольник ABC, внешний угол BCK является смежным с углом BCA (см. черт. 1.52(2)). Докажем, что $\angle BCK > \angle ABC$.

Через середину стороны BC (точку O), и вершину A проведем прямую. На проведенной прямой от точки O отложим отрезок OL, равный отрезку AO (откладывание производим по направлению от вершины A). Построим отрезок LC. $\angle BCK = \angle BCL + \angle LCK$. Рассмотрим треугольники BOA и COL. Углы BOA и COL равны как вертикальные углы. $OB = OC$ и $OA = OL$ по построению. $\triangle BOA = \triangle COL$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников вытекает равенство соответствующих углов: $\angle ABO = \angle OCL$. Так как $\angle BCK >$ $> \angle BCL$ и $\angle BCL = \angle OCL = \angle ABO = \angle ABC$, то $\angle BCK >$ $> \angle ABC$. Аналогично доказывается, что $\angle BCK > \angle BAC$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.21. *Во всяком треугольнике против бóльшей стороны лежит и бóльший угол. Против бóльшего угла лежит и бóльшая сторона треугольника*

Доказательство. Докажем первое утверждение. В треугольнике ABC $AB > BC$. Докажем, что $\angle BCA > \angle BAC$ (см. черт. 1.53(1)). Отметим отрезок $BL = BC$ на стороне AB.



Чертеж 1.53. Соотношение между сторонами и углами треугольника.

Треугольник BLC — равнобедренный. $\angle BLC = \angle LCB$, значит, $\angle BCA > \angle BLC$. $\angle BLC > \angle LAC$, так как внешний угол треугольника ALC больше внутреннего, не смежного с ним угла. $\angle LAC = \angle BAC$. Значит, угол BLC больше угла BAC, а потому $\angle BCA > \angle BAC$.[12]

Докажем второе утверждение (см. черт. 1.53(2)). $\angle BCA >$ $> \angle BAC$. Доказать, что $AB > BC$. Допустим, $AB < BC$. Отметим на стороне BC точку K так, чтобы отрезок BK был равен AB. Треугольник ABK — равнобедренный треугольник,

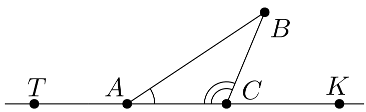
[12]Отметьте прием, которым была найдена разность сторон AB и BC. Он еще пригодится при решении задач.

тогда $\angle BKA = \angle BAK$. $\angle BKA > \angle BCA$, так как внешний угол треугольника AKC больше внутреннего, не смежного с ним угла. $\angle BAK < \angle BAC$ или $\angle BKA < \angle BAC$. Так как $\angle BKA >$ $> \angle BCA$, то $\angle BCA < \angle BAC$. Мы пришли к противоречию с условием теоремы. Значит, $AB > BC$. □

Теорема 1.22. *Если два угла, прилежащих к одной стороне треугольника, равны, то две другие стороны также равны (против равных углов лежат равные стороны).*

Доказательство. Если принять, что две другие стороны не равны, то по теореме 1.21 один из углов должен быть больше другого. Этот вывод противоречит условию теоремы, значит, мы можем принять только равенство сторон. Данная теорема является *признаком равнобедренного треугольника.* □

Теорема 1.23. *Сумма двух внутренних углов треугольника, прилежащих к одной стороне, меньше двух прямых углов.*



Чертеж 1.54. Сумма двух внутренних углов треугольника, прилежащих к одной стороне, меньше двух прямых углов.

Доказательство. Дан треугольник ABC (см. черт. 1.54). $\angle BAT$ — внешний угол треугольника, смежный с внутренним углом BAC. $\angle BCK$ — другой внешний угол треугольника, смежный с внутренним углом BCA. $\angle BAC$ и $\angle BCA$ — два внутренних угла треугольника, прилежащих к стороне AC. Из теоремы о смежных углах 1.5 мы знаем, что $\angle BAT = 2d - \angle BAC$ и $\angle BCK = 2d -$ $- \angle BCA$. По теореме 1.20 $\angle BAT > \angle BCA$, а $\angle BCK > \angle BAC$. Из двух неравенств составим одно и преобразуем его:
$\angle BAT + \angle BCK > \angle BCA + \angle BAC$.

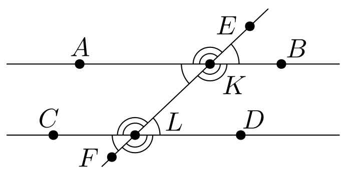
$(2d - \angle BAC) + (2d - \angle BCA) > \angle BCA + \angle BAC.$
$4d - (\angle BAC + \angle BCA) > \angle BCA + \angle BAC.$
$4d > 2 \cdot (\angle BCA + \angle BAC)$ или $2d > \angle BCA + \angle BAC.$
$\angle BCA + \angle BAC < 2d.$
Аналогично $\angle CAB + \angle CBA < 2d$ и $\angle ABC + \angle BCA < 2d.$ □

Следствие. В прямоугольном треугольнике прямой угол больше любого другого внутреннего угла. □

Если две прямые пересечены третьей так, что образуются две новые точки, то третья прямая называется *секущей.* Посмотрите на чертеж 1.54: прямая AC является секущей для двух пересекающихся прямых AB и BC. *Внутренние односторонние углы* — это углы, которые лежат между двумя прямыми по одну сторону от секущей. Углы BAC и BCA — внутренние односторонние углы, которые лежат между прямыми BA, BC и секущей AC. Опираясь на теорему 1.23, мы утверждаем, что сумма внутренних односторонних углов, образованных двумя *пересекающимися* прямыми и секущей, меньше двух прямых углов.

Определение 1.11. *Параллельные прямые — это прямые, которые не пересекаются.*

Теорема 1.24. *Если две прямые пересечены третьей, и сумма двух внутренних односторонних углов равна $2d$, то прямые параллельны.*



Чертеж 1.55. Сумма двух внутренних односторонних углов равна двум прямым углам.

Доказательство. Даны прямые AB и CD, через которые проходит секущая EF в точках K и L. $\angle AKL$ и $\angle CLK$, а также $\angle BKL$ и $\angle KLD$ — внутренние односторонние углы (см. черт. 1.55). $(\angle AKL + \angle BKL) + (\angle CLK + \angle DLK) = 2d + 2d = 4d$, так как сумма смежных углов равна $2d$. Если мы принимаем, что $\angle AKL + \angle CLK = 2d$ по условию теоремы, то $\angle BKL + \angle DLK = 2d$. Необходимо доказать, что прямые AB и CD не пересекаются.

Если бы полупрямые KA и LC пересекались слева от секущей, то согласно проведенному исследованию, сумма углов $\angle AKL$ и $\angle CLK$ должна быть меньше $2d$, но по условию теоремы она равна $2d$. Значит, принять пересечение полупрямых KA и LC мы не можем. Если бы полупрямые KB и LD пересекались справа от секущей, то сумма углов $\angle BKL$ и $\angle DLK$ также должна быть меньше $2d$, но по выводу из условия теоремы она равна $2d$. Принять пересечение полупрямых KB и LD мы также не можем. Так как принять пересечение полупрямых, которые составляют прямые, мы не можем, то признаем параллельность прямых. $AB \parallel CD$. □

Следствия.

Если сумма двух внутренних односторонних углов равна $2d$:
1. $\angle KLD = 2d - \angle KLC = 2d - (2d - \angle AKL) = \angle AKL$ или $\angle AKL = \angle KLD$. Аналогично $\angle BKL = \angle KLC$. Углы $\angle AKL$ и $\angle KLD$, а также углы $\angle BKL$ и $\angle KLC$ — внутренние накрест лежащие углы. Теорема будет справедлива и в такой формулировке: если две прямые пересечены третьей, и внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
2. Углы $\angle EKB$ и $\angle CLF$, $\angle EKA$ и $\angle DLF$ — внешние перекрестные углы. Теорема справедлива и в этой формулировке: если две прямые пересечены третьей, и внешние перекрестные углы равны, то прямые параллельны.
3. Соответственные углы: $\angle EKA$ и $\angle KLC$, $\angle CLF$ и $\angle AKL$, $\angle EKB$ и $\angle KLD$, $\angle BKL$ и $\angle DLF$. Если две прямые пересечены третьей, и соответственные углы равны, то прямые параллель-

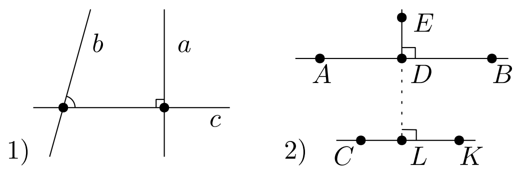
ны.
4. Внешние односторонние углы: $\angle EKA$ и $\angle CLF$, $\angle EKB$ и $\angle FLD$. Если две прямые пересечены третьей, и сумма внешних односторонних углов равна $2d$, то прямые параллельны. [13] □

Упражнение для самостоятельного решения 12. *Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Проведите через точку прямую, параллельную данной. Подсказка: через данную точку проведите произвольную прямую так, чтобы она пересекала данную. Догадываетесь, как из данной точки от построенной прямой отложить угол и какой величины?*

Даны три прямые a, b и c (см. черт. 1.56(1)). Секущая c пересекает прямую a под прямым углом, а прямую b под углом, отличным от прямого. Тогда мы утверждаем:

Аксиома 1.10. *Перпендикуляр и наклонная к одной прямой при достаточном продолжении пересекутся.*[14]

Теорема 1.25. *Прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных, пересекает другую и перпендикулярна ей.*



Чертеж 1.56. К пятому постулату Евклида.

Доказательство. Даны две параллельные прямые AB и CK (см. черт. 1.56(2)). Опустим перпендикуляр из точки E на прямую AB, получим основание перпендикуляра в точке D. Отрезок

[13]Следствия 2, 3 и 4 докажите самостоятельно.
[14]Эта аксиома является одной из форм пятого постулата Евклида.

ED перпендикулярен прямой AB. Из точки D опустим перпендикуляр на CK. $DL \perp CK$. Предположим, что отрезок LD не перпендикулярен прямой AB, тогда BD и AD будут наклонными к LD. Прямая CK перпендикулярна DL, тогда по аксиоме 1.10 либо полупрямая DB пересечет CK, либо DA, а это противоречит условию теоремы. Предположение неверно, тогда $LD \perp AB$. Из одной точки прямой AB восстановлены два перпендикуляра DE и DL. По какие бы стороны прямой AB не лежали восстановленные перпендикуляры, они лежат на одной прямой. □

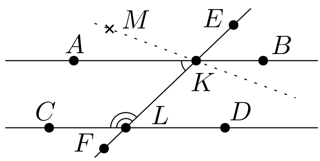
Следствия.

1) Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

2) Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной.

3) Прямая, пересекающая одну из параллельных, пересекает и другую.[15] □

Теорема 1.26. *(Обратная теореме 1.24) Если две прямые параллельны между собой, то сумма двух внутренних односторонних углов, образованных при пересечении третьей прямой, равна двум прямым углам.*



Чертеж 1.57. Две параллельные прямые пересечены третьей (секущей).

Доказательство. Параллельные прямые AB и CD пересекаются секущей EF в точках K и L соответственно. Нужно доказать,

[15] Докажите самостоятельно.

что $\angle AKL + \angle CLK = 2d$.

Допустим, что $\angle AKL + \angle CLK < 2d$. Тогда к какому-то одному из двух углов стоит добавить некую величину, чтобы получить $2d$. Добавим эту величину к углу AKL, пусть это будет угол MKA. Тогда $\angle AKL + \angle MKA + \angle CLK = 2d$. По теореме 1.24 прямая MK должна быть параллельна CD. Тогда через одну точку проходят две прямые, параллельные третьей. По следствию теоремы 1.25 это невозможно. Наше допущение ошибочно. Таким же способом доказывается ошибочность того, что $\angle AKL + \angle CLK > 2d$.

Значит, $\angle AKL + \angle CLK = 2d$. □

Следствия.

Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой:

1) внутренние накрест лежащие углы будут равны;
2) внешние перекрестные углы будут равны;
3) соответственные углы равны;
4) сумма внешних односторонних углов равна двум прямым углам. □

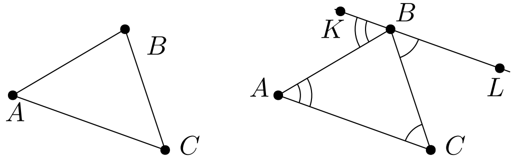
Упражнение для самостоятельного решения 13. *Докажите, что все точки одной параллельной прямой находятся на одинаковом расстоянии (равноудалены) от другой параллельной прямой. Используйте доказательство от противного.*

Продолжим поиск соотношения между углами треугольника.

Задача 1.19. *Дан произвольный треугольник ABC. Через вершину B проведите прямую, параллельную стороне AC.*

Решение. Надеюсь, вы самостоятельно решили упражнение 12, поэтому с легкостью проведете через точку B прямую, параллельную AC (см. черт. 1.58). □

Исследование решения задачи. Угол LBC равен углу ACB, так как эти углы являются внутренними накрест лежащими угла-



Чертеж 1.58. Сумма внутренних углов треугольника.

ми, образованными параллельными прямыми LK и AC и секущей BC. Аналогично $\angle KBA = \angle BAC$. По следствию теоремы 1.5 сумма углов KBA, ABC и LBC равна двум прямым углам. $\angle KBA + \angle ABC + \angle LBC = 2d$.

Подставим в равенство равные внутренние накрест лежащие углы: $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2d$.

Мы пришли к тому, что *сумма внутренних углов любого треугольника равна двум прямым углам.*[16] □

Мы можем составить следующий список рекомендаций по решению задач:

1. Постарайтесь вспомнить как можно больше свойств данных или построенных фигур.

2. Проводите через данные или найденные точки прямые или окружности, если есть предположение, что появятся новые точки.

3. Если нет точек, а даны прямые, то проведите вспомогательную прямую, пересекающую данные прямые.

4. Если даны (найдены) отрезок или угол, подумайте, поможет ли деление пополам или увеличение вдвое найти новую точку.

5. Подумайте, поможет ли проведение параллельных прямых

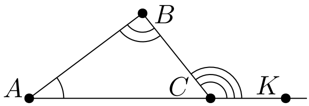
[16] Со свойством углов треугольника связаны свойства углов других фигур. Многие измерения и вычисления невозможно произвести без знания этого утверждения. Отметьте, что мы не смогли бы прийти к нему без аксиомы 1.10.

найти новые точки.

6. Если знаете, как должен выглядеть чертеж, но не знаете, как построить фигуры с помощью циркуля и линейки, то выполните набросок от руки. Выявленные свойства «нарисованных» фигур помогут найти способ их построения.

Если излишне построенные на чертеже линии мешают его исследовать, то пользуйтесь ластиком, в крайнем случае можно сменить лист бумаги. Навык решения геометрических задач приобретается только с опытом.[17]

Упражнение для самостоятельного решения 14. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним (см. черт. 1.59). Докажите.*

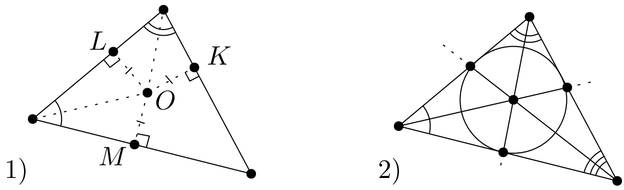


Чертеж 1.59. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

Взглянем на место пересечения биссектрис, проведенных из вершин двух углов треугольника (см. черт. 1.60(1)). Две биссектрисы пересекутся внутри двух углов в точке O, так как их положение «стеснено» сторонами каждого из углов. Расстояние OK $= OL$, так как биссектриса угла — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. $OL = OM$, тогда $OK = OM$.[18] Если мы соединим точку O с вершиной третьего угла, то построенный отрезок будет лежать на полупрямой, которая также будет являться биссектрисой этого угла. Мы можем построить

[17]Задачи вы можете найти в «Руководстве геометрии» А. Малинина и Ф. Егорова.

[18]Точки L, M, K на чертеже 1.60 не являются основаниями биссектрис, а являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки O.



Чертеж 1.60. Место пересечения биссектрис треугольника — центр вписанной окружности.

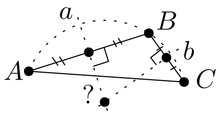
окружность с центром в точке O и радиусом OL. Окружность будет касаться трех сторон треугольника (см. черт. 1.60(2)). Такая окружность называется вписанной в треугольник окружностью.

Задача 1.20. *Вокруг произвольного треугольника описать окружность.*

Решение. Окружность называется описанной около треугольника, если его вершины лежат на линии окружности. Центр окружности тогда находится на одном удалении от всех трех вершин. Если мы восстановим перпендикуляр из середины одной стороны, то центр окружности должен лежать на этом перпендикуляре, так как концы стороны равноудалены от любой точки серединного перпендикуляра. Если восстановим перпендикуляр из середины другой стороны, то центр окружности также должен лежать и на втором перпендикуляре.

Докажем, что восстановленные перпендикуляры пересекутся, тогда их точка пересечения и есть центр искомой окружности.

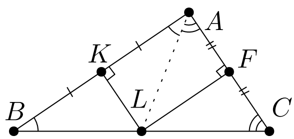
Дан произвольный треугольник ABC (см. черт. 1.61). Проведем через середину стороны AB перпендикулярную ей прямую a. Через середину стороны BC проведем перпендикулярную ей прямую b. Допустим, что прямые a и b не пересекаются или $a \parallel b$. Так как $AB \perp a$ по условию, и $a \parallel b$ по допущению, то по теореме 1.25 $AB \perp b$. $BC \perp b$ по условию, тогда приходим к выводу, что AB и BC не пересекаются, так как они перпендикулярны одной



Чертеж 1.61. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность?

прямой b. Этот вывод противоречит условию о том, что AB и BC имеют общую точку B. Допущение ошибочно. Прямые a и b пересекаются. Значит, через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, а по теореме 1.11 — только одну. □

Исследование. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. черт. 1.62). Проведем два серединных перпендикуляра из точек K и F к сторонам AB и AC соответственно. Рассмотрим случай, когда точка пересечения двух серединных перпендикуляров L лежит на стороне BC. $AL = BL$, так как точка L — точка на серединном



Чертеж 1.62. Центр описанной окружности лежит на стороне треугольника.

перпендикуляре KL к стороне AB. $LC = AL$, так как точка L — точка на серединном перпендикуляре LF к стороне AC. Выходит, что $BL = LC$. Значит, точка L лежит на середине отрезка BC, и в этой точке находится центр описанной окружности.

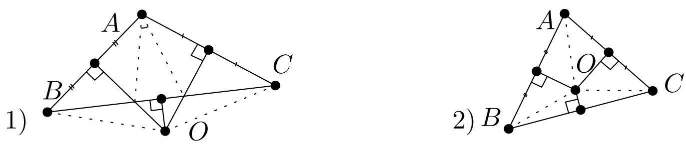
Пусть $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$.[19] $\angle BAL = \angle KAL =$

[19] Величину неизвестного угла принято обозначать буквой греческого алфавита.

$= \angle KBL = \angle ABC$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABL с боковыми сторонами AL и BL. $\angle CAL = \angle FAL = \angle FCL = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника ACL с боковыми сторонами AL и LC. Тогда $\angle BAC = \angle BAL + \angle CAL = \alpha + \beta$. Так как сумма углов любого треугольника равна $2d$, мы можем составить следующее равенство: $\angle BAC = 2d - (\angle ABC + \angle BCA)$ или $\alpha + \beta = 2d - (\alpha + \beta)$. Тогда $2(\alpha + \beta) = 2d$ или $\alpha + \beta = d$.

Получаем, что $\angle BAC = d$, а треугольник BAC — прямоугольный треугольник. Гипотенуза BC прямоугольного треугольника — это диаметр описанной вокруг него окружности, и центр окружности делит ее пополам. Вывод: если вокруг треугольника описана окружность, и центр окружности лежит на одной из сторон, то треугольник есть прямоугольный, а центр окружности лежит на гипотенузе и делит ее пополам. Доказательство обратного утверждения о том, что *центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе и делит ее пополам*, смотрите по теореме 2.13 на стр. 101.

Рассмотрим случай, когда центр описанной окружности лежит «снаружи» $\triangle BAC$ (см. черт. 1.63(1)). В этом случае один из



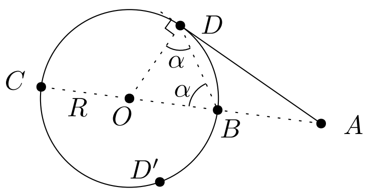
Чертеж 1.63. Центр описанной окружности лежит снаружи и внутри треугольника.

углов треугольника ($\angle BAC$) будет больше прямого[20], а остальные два будут меньше прямого, так как сумма всех внутренних углов треугольника равна двум прямым. Такой треугольник

[20] Доказательство этого утверждения и следующего оставляем читателю.

называется *тупоугольным*, так как угол, больший d и меньший $2d$, называют тупым. Если центр описанной окружности лежит внутри треугольника, то каждый из углов треугольника меньше прямого (см. черт. 1.63(2)). Такой треугольник называется *остроугольным.* Угол, меньший d, называют *острым.* □

Задача 1.21. *Даны окружность радиусом R и точка A. Расстояние от точки A до центра окружности больше R. Проведите через точку A касательную к окружности.*



Чертеж 1.64. Касательная к окружности.

Решение. Если нет идей в решении задачи, то считаем задачу решенной. «От руки» через точку A проводим касательную к окружности, получим точку касания D (см. черт. 1.64). Проведем прямую через точку A и центр окружности O. Получим точки B и C. Отрезок OD равен отрезку OC, отрезок OC равен отрезку OB, и все три отрезка равны радиусу окружности. Угол ODA — прямой угол, так как AD — касательная к окружности.

Обозначим величину угла ODB через α. В треугольнике ODB сторона OD равна стороне OB. По теореме 1.18 $\angle ODB = \angle OBD$, как углы при основании равнобедренного треугольника. $\angle OBD = \alpha$. $\angle DOB = 2d - 2\alpha$, так как сумма внутренних углов треугольника равна $2d$. Никаких новых открытий из рассмотрения углов мы не можем сделать.

Мы знаем, что $AD \perp OD$. Треугольник ODA — прямоугольный. OD и DA — катеты, AO — гипотенуза. Что мы знаем про прямоугольные треугольники? Из задачи 1.20 нам известно, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Вершины углов треугольника также лежат на описанной окружности! Тогда точка D будет лежать на пересечении двух окружностей: данной окружности и окружности с центром в середине отрезка OA.

Алгоритм решения задачи: 1) соединяем отрезком центр данной окружности и данную точку; 2) построенный отрезок делим пополам; 3) из середины построенного отрезка проводим окружность с радиусом, равным его половине; 4) построенная окружность пересечет данную в двух точках; 5) обе найденные точки будут точками касаний. Решите задачу самостоятельно. □

Контрольное упражнение 2.

1. Равносторонний треугольник — это треугольник, в котором все три стороны равны. С помощью циркуля и линейки постройте произвольный равносторонний треугольник. Докажите, что углы равностороннего треугольника равны между собой. Какой величине равен угол равностороннего треугольника?

2. С помощью циркуля и линейки постройте произвольный равнобедренный треугольник.

3. Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину угла с серединой противоположной стороны. Докажите, что медиана, проведенная из угла при вершине в равнобедренном треугольнике, является также его высотой и биссектрисой.

4. Даны три отрезка. Первый отрезок — одна сторона треугольника, второй отрезок — сумма двух других его сторон, третий отрезок — разность двух других его сторон. Задайте величины отрезков самостоятельно и постройте треугольник.

5. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте внешний угол BCK. На полупрямой CK от точки C отложите отрезок, равный BC, отметьте точку M. Какую величину от *угла BCA составляет угол BMA?*

6. Дан прямоугольный треугольник CAB с прямым углом A и биссектрисой CM. Выразите величину угла B через величины углов AMC и ACM.

7. Проведите касательную к окружности под данным углом к данной прямой. Окружность, угол и прямую задайте самостоятельно.

8. Определите, какую часть гипотенузы составляет катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла $\frac{d}{3}$.[21]*

9. Докажите, что центры окружностей, вписанной в равносторонний треугольник и описанной вокруг него, совпадают.

10. Докажите, что во всяком треугольнике, три высоты, проведенные из вершины каждого угла, пересекаются в одной точке. Такая точка называется ортоцентром треугольника.[22]*

11. Докажите, что угол между биссектрисами смежных углов равен d.

12. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, меньшие прилежащих сторон (ME 143.36).

13. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу, а также по гипотенузе и острому углу.

14. Докажите, что сумма отрезков, делящих каждый угол треугольника пополам, меньше его периметра. Периметр треугольника — это отрезок, равный сумме всех его сторон (ME 143.48).

15. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если их периметры и углы при вершинах соответственно равны (ME 143.54).

16. Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если они имеют по две равных стороны и отрезки, соединя-

[21] Проведите высоту в равностороннем треугольнике.

[22] Проведите через вершины углов прямые, параллельные сторонам.

ющие середины этих сторон с вершинами противолежащих углов, также равны (ME 143.60).

17. Если две стороны и угол, лежащий против большей из сторон одного треугольника, равны соответственно двум сторонам и углу, лежащему против большей из сторон другого треугольника, то такие треугольники равны. Докажите. Для чего введено условие о величине противоположной стороны?

18. Постройте равносторонний треугольник по известной высоте. Величину высоты задайте самостоятельно (ME 144.20).

19. Постройте прямоугольный треугольник по катету и разности двух острых углов (ME 144.33).[23]

20. Постройте прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета (ME 144.38).

21. Постройте треугольник по данному периметру и двум сторонам (ME 144.45).

22. Постройте треугольник по данной стороне, углу, прилежащему к ней, и сумме двух других сторон (ME 144.49).[24]

23. Постройте треугольник по периметру и двум данным углам.

24. Разделите прямой угол на три равные части (ME 144.50). *[25]

25. Постройте равносторонний треугольник по данному периметру (ME 144.54).

26. Разделите угол пополам между прямыми MP и NQ, не продолжая их до пересечения (ME 144.57). *[26]

27. Из вершин произвольного треугольника опишите три внешне касающиеся[27] *между собой окружности (ME 144.63).*

[23] Считайте задачу решенной. Проведите биссектрису острого угла.

[24] Сперва постройте треугольник со стороной, равной сумме двух других сторон. Вспомните про равнобедренный треугольник. Найдите второй прилежащий угол.

[25] Вспомните, где вы встречали угол величиной $\frac{2}{3}d$.

[26] Биссектрисы углов треугольника встречаются в одной точке; два раза найдите пересечение двух биссектрис.

[27] Пример двух внешне касающихся окружностей приведен на чертеже 1.39(b, справа) на стр. 45.

Глава 2.

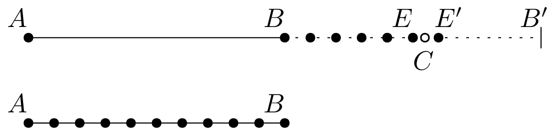
Пропорциональные линии и подобие треугольников

2.1. О длине отрезка и пропорции

По сведениям, дошедшим до нас от древнегреческих историков, философ и математик Фалес Милетский, живший в VII-VI вв. до нашей эры, определил высоту египетской пирамиды, сравнив свой рост с длиной своей тени и длиной тени пирамиды. Сложнейшая задача была решена применением принципа подобия.

В прошлой главе было отмечено, что если отношение между двумя отрезками можно выразить в целых числах, то отрезки соизмеримы. Отрезки, не имеющие общей меры, называются несоизмеримыми. Отношение между несоизмеримыми отрезками в целых числах выразить невозможно.

Задача 2.1. [1] *Вычислить отношение двух несоизмеримых отрезков с данной степенью точности.*



Чертеж 2.1. Отношение несоизмеримых отрезков.

Решение. Даны отрезки AB и AC так, что $AB < AC$, и отношение AC к AB нельзя выразить в целых числах. Допустим, что AB откладывается в AC один раз с остатком BC. Отложим отрезок AB', равный $2AB$. Отношение $\frac{AB}{AB} = 1$, а отношение $\frac{AB'}{AB} = 2$. Числа 1 и 2 являются приближенными значениями отношения $\frac{AC}{AB}$ с точностью до 1. Если бы AB содержался в AC более 3-х раз, но менее 4-х раз, то приближенные значения с точностью до 1 были бы равны 3 и 4. Разделим отрезок AB на 10 равных частей (см. черт. 2.1). Будем последовательно откладывать десятую часть (от границы отрезка в точке A) до тех пор, пока конец новой отложенной части не «перешагнет» точку C. Пусть в точке E десятая часть откладывается 15 раз, тогда в точке E', которая находится правее точки C, она будет откладываться 16 раз. Отношение $\frac{AE}{AB} = \frac{15}{10}$, а отношение $\frac{AE'}{AB} = \frac{16}{10}$. Числа $\frac{15}{10}$ и $\frac{16}{10}$ — приближенные отношения $\frac{AC}{AB}$ с точностью до $\frac{1}{10}$. Точно так же мы могли поступить разделив AB на 100 частей. Тогда, если отношение $\frac{AE}{AB} = \frac{153}{100}$, а отношение $\frac{AE'}{AB} = \frac{154}{100}$, то мы определили отношение $\frac{AC}{AB}$ с точностью до $\frac{1}{100}$.

Чтобы вычислить отношение $\frac{AC}{AB}$ с точностью до $\frac{1}{n}$, где n — произвольное целое число, нужно отрезок AB разделить на n

[1] Текст задачи приведен по книге Дм. Ройтмана «Курс элементарной геометрии».

равных частей. Пусть в точке E n-ая часть отрезка откладывается m раз, а в точке E' — $m+1$ раз. Числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ — приближенные значения отношения $\frac{AC}{AB}$ с точностью до $\frac{1}{n}$. При неограниченном увеличении числа n, точки E и E' будут приближаться к точке C слева и справа, но никогда ее не достигнут. В таком случае говорим, что точка C служит предельным положением для изменяющихся концов отрезков AE и AE'. Мы не можем выразить величину AC точным арифметическим числом, но мы можем выразить ее с произвольной степенью точности. Такое число и будет выражать собой отношение $\frac{AC}{AB}$ в случае несоизмеримости отрезков AC и AB. $\square$

Пропорцией называется равенство двух отношений. *Пропорциональными* называются такие четыре отрезка, что отношение двух из них равно отношению двух других. Мы говорим, что отрезки a, b, c, d пропорциональны, если выполняется следующее равенство: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

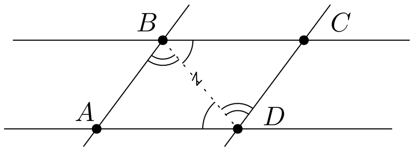
2.2. Пропорциональные отрезки

Задача 2.2. *Даны три отрезка со следующими длинами: a, b, c. Найдите четвертый, пропорциональный, отрезок.*

Для решения этой задачи решим еще одну задачу и докажем несколько теорем.

Задача 2.3. *Докажите, что две параллельные прямые при пересечении двух других параллельных прямых отсекают от них равные отрезки.*

Доказательство. Условие задачи показано на чертеже 2.2: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Точки A и C выбраны так, что лежат по обе стороны секущей BD. Рассмотрим треугольники ABD и BCD. $\triangle ABD$ равен $\triangle BCD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, так как сторона BD — общая, $\angle CBD = \angle BDA$ и $\angle ABD =$



Чертеж 2.2. Две параллельные прямые пересекают две другие параллельные прямые.

$= \angle CDB$ как внутренние накрест лежащие углы между параллельными прямыми и секущей. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон: $AB = CD$, $AD = BC$. □

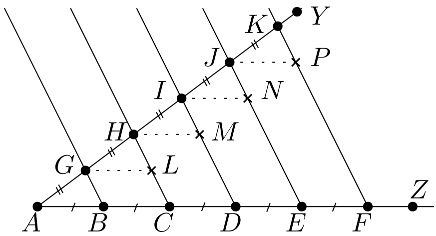
Обратно. Если две прямые пересекают параллельные прямые и отсекают от параллельных равные отрезки, то они параллельны.[2] □

Что будет, если две пересекающиеся (не параллельные) прямые пересекаются параллельными прямыми?

Теорема 2.1. *Если на одной из сторон угла отложить равные отрезки, и через концы этих отрезков провести параллельные прямые, то эти параллельные прямые на другой стороне угла отсекут равные отрезки (теорема Фалеса).*

Доказательство. Дан угол YAZ. На стороне AZ мы отложили отрезки $AB = BC = CD = DE = EF$. Через точки B, C, D, E, F провели параллельные прямые, которые пересекут полупрямую AY в точках G, H, I, J, K. Нам необходимо доказать, что $AG = GH = HI = IJ = JK$ (см. черт. 2.3). Через точки G, H, I, J, K проведем прямые, параллельные AZ. Они пересекут отрезки HC, ID, JE, KF в точках L, M, N, P соответственно. Рассмотрим треугольники AGB и GHL. Сторона $GL = BC$,

[2] Докажите самостоятельно.



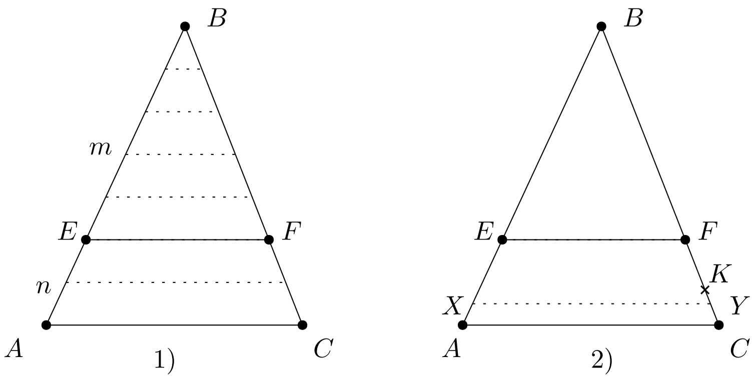
Чертеж 2.3. Параллельные прямые на одинаковом расстоянии пересекают стороны угла.

так как $GL \parallel BC$ и $GB \parallel LC$. Так как $AB = BC$, то $AB = GL$. $\angle GBA = \angle LCB = \angle HLG$. $\angle HGL = \angle GAB$. Треугольник AGB равен треугольнику GHL по стороне и двум прилежащим к ней углам. Аналогично доказывается, что $\triangle GHL = \triangle HIM = \triangle IJN = \triangle JKP$. Из равенства треугольников следует: $AG = GH = HI = IJ = JK$. Понятно, что на сторонах угла мы могли бы нарезать сколько угодно отрезков, и от этого вывод бы не поменялся. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.2. *Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, делит две другие стороны на пропорциональные части.*[3]

Доказательство. В треугольнике ABC прямая $EF \parallel AC$ и пересекает две стороны угла ABC (см. черт. 2.4). Рассмотрим два случая: когда длины отрезков BE и EA являются соизмеримыми и несоизмеримыми.

[3]Очевидно, что прямая должна пересекать обе стороны треугольника и не проходить через вершину.



Чертеж 2.4. Отсечение пропорциональных отрезков.

1. Если общая мера откладывается m раз в отрезке BE и n раз в отрезке EA, то отношение BE к EA выражается через отношение $\frac{m}{n}$ (см. черт. 2.4(1)). Согласно теореме 2.1, BF также делится на m равных отрезков, а FC на n равных отрезков. $\frac{BF}{FC} = \frac{m}{n}$. Значит, $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC}$.

2. В случае несоизмеримости BE и EA предположим, что $\frac{BE}{EA} < < \frac{BF}{FC}$. Возьмем вместо отрезка FC отрезок FK так, чтобы выполнялось равенство $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FK}$ (см. черт. 2.4(2)). Разделим BF на такое целое количество равных частей, чтобы каждая часть была меньше KC. Если будем постепенно откладывать части по отрезку BC от точки F в сторону точки C, то настанет такой момент, когда конец новой отложенной части окажется между точками K и C. Отметим точку Y между точками K и C. Проведем прямую XY, параллельную AC. Согласно первой части доказательства теоремы, получим: $\frac{BF}{FY} = \frac{BE}{EX}$.

$$\frac{BF}{FY} = \frac{BE}{EX} \text{ и, по допущению, } \frac{BF}{FK} = \frac{BE}{EA},$$

$$\frac{BF}{BE} = \frac{FY}{EX}, \text{ и } \frac{BF}{BE} = \frac{FK}{EA},$$

$$\text{тогда: } \frac{FY}{EX} = \frac{FK}{EA} \text{ или } \frac{EX}{EA} = \frac{FY}{FK}.$$

Чтобы выполнялась найденная пропорция, отрезок FY должен быть меньше FK, так как $EX < EA$. Построение говорит нам о другом. Мы пришли к противоречию. Аналогично, к противоречию мы придем, если примем, что $\frac{BE}{EA} > \frac{BF}{FC}$.
Нам остается признать, что $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC}$. Теорема доказана.

□

Следствие. Воспользуемся свойствами пропорции:

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC}, \quad \frac{BE+EA}{BE} = \frac{BF+FC}{BF} \text{ и } \frac{BE+EA}{EA} = \frac{BF+FC}{FC}.$$

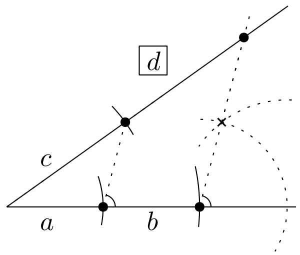
$$\frac{BA}{BE} = \frac{BC}{BF} \text{ и } \frac{BA}{EA} = \frac{BC}{FC}.$$

Прямая, параллельная третьей стороне, делит две другие стороны на отрезки, пропорциональные не только между собой, но и с целой частью. □

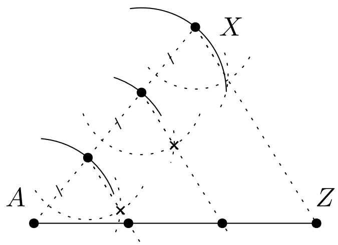
Продолжение решения задачи 2.2. Итак, чтобы построить пропорциональный отрезок, нам необходимо на одной стороне угла отложить два отрезка. На второй стороне отметим третий отрезок. Проведем прямую через конец второго отрезка параллельно прямой, лежащей на концах первого и третьего отрезков. Вторая параллельная прямая отсечет искомую пропорциональную часть (см. черт. 2.5). □

Задача 2.4. *Разделить произвольный отрезок на 3 равные части.*

Решение. Проведем через конец A данного отрезка AZ прямую под некоторым углом к нему. С помощью циркуля отметим на построенной прямой 3 равных отрезка произвольной длины (см.



Чертеж 2.5. Построение пропорционального отрезка d по трем известным: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



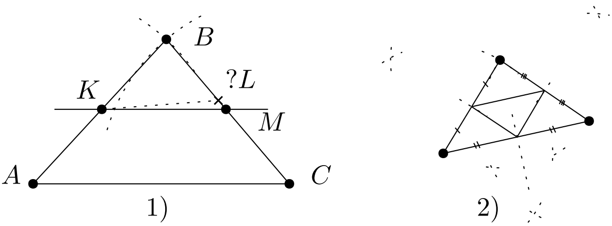
Чертеж 2.6. Деление отрезка AZ на 3 равные части.

черт. 2.6). Соединим конец X последнего отложенного отрезка с другим концом Z заданного отрезка. Через каждую построенную точку («засечку») проведем прямую, параллельную XZ. Построенные параллельные прямые, согласно теореме Фалеса, разделят отрезок AZ на равные части. В нашем случае мы разделили отрезок на 3 равные части. Приведенный способ можно применять для деления отрезка на n равных частей. □

Упражнение для самостоятельного решения 15. *Самостоятельно задайте отрезок произвольной длины. Разделите его на 5 равных частей.*

Теорема 2.3. *Прямая, которая делит две стороны треугольника на пропорциональные части, параллельна третьей стороне.*

Доказательство. Дан треугольник ABC, стороны AB и BC пересекает прямая KM так, что делит их на пропорциональные части $\frac{AK}{BK} = \frac{CM}{BM}$. Докажем, что $KM \parallel AC$ (см. черт. 2.7(1)). До-



Чертеж 2.7. 1) Прямая делит стороны треугольника на пропорциональные части. 2) Средние линии треугольника.

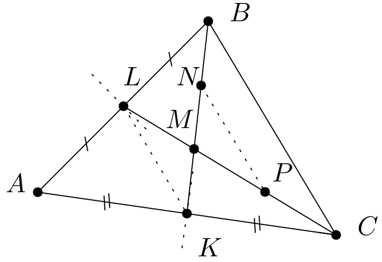
пустим, что KM не параллельна AC, тогда через точку K мы можем провести прямую, параллельную AC. Эта параллельная прямая пересечет сторону BC в некоторой точке L. По теореме 2.2 $\frac{AK}{BK} = \frac{CL}{BL}$, тогда $\frac{CL}{BL} = \frac{CM}{BM}$. Отрезок BC разделен на равные части. Нам остается признать только то, что точка L сливается с точкой M. Прямые KM и KL — одна прямая, а так как $KL \parallel AC$, то и $KM \parallel AC$. $\square$

Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Из только что доказанной теоремы мы можем сделать вывод, что каждая средняя линия треугольника, соединяющая обе его стороны, параллельна третьей стороне (см. черт. 2.7(2)). Средняя линия треугольника равна половине параллельной стороны. Докажите это утверждение самостоятельно.

Упражнение для самостоятельного решения 16. *Постройте произвольный треугольник. Постройте в нем три средние линии.*

Теорема 2.4. *Медианы треугольника пересекаются и в точке пересечения делятся в отношении* $2:1$*, считая от вершины.*

Доказательство. Для начала разберемся с пересечением двух медиан. В треугольнике ABC проведены две медианы BK и CL, которые пересекаются в точке M (см. черт. 2.8). Из определения



Чертеж 2.8. Медианы треугольника делятся в отношении $2:1$ считая от вершины угла.

медианы имеем, что $AL = LB = \frac{1}{2}AB$ и $AK = KC = \frac{1}{2}AC$. Отрезок KL соединяет середины двух сторон, значит, является средней линией. $KL \parallel BC$ и $KL = \frac{1}{2}BC$.

В треугольнике BMC стороны MB и MC соединим средней линией NP. Тогда $NP \parallel BC$ и $NP = \frac{1}{2}BC$.

Из сказанного следует, что $NP = KL$ и $NP \parallel KL$. $\angle MLK = \angle MPN$ и $\angle MKL = \angle MNP$, как внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными LK и NP и секущими CL и BK. Треугольники LMK и PMN равны.

Из равенства треугольников следует равенство сторон. $LM = PM$, $PM = PC$, $LM + PM + PC = LC$, $LM + 2LM = LC$. Аналогично $MK + 2MK = BK$.

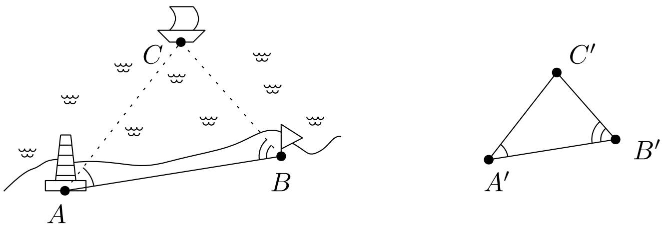
Если третья медиана, проведенная из вершины $\angle BAC$, не проходит через точку M, а пересекает LC в некоторой точке M', то мы можем заключить, что на медиане LC есть две точки, делящие ее в отношении $2:1$, а такого быть не может. Теорема доказана. $\square$

Упражнение для самостоятельного решения 17. *Самостоятельно задайте треугольник. Постройте в нем три медианы и убедитесь в справедливости предыдущей теоремы.*

2.3. Признаки подобия треугольников

Подобными прямолинейными фигурами на плоскости называются такие, у которых углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны. *Сходственными сторонами* называют стороны, лежащие против равных углов.

Мы желаем измерить расстояние от наблюдателя в точке A до недоступного объекта в точке C (см. черт. 2.9). Для этого нам

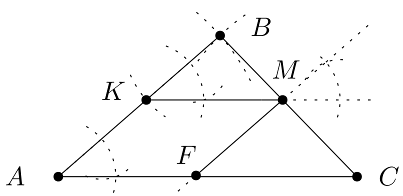


Чертеж 2.9. Косвенное измерение расстояния до недоступного объекта.

необходимо измерить длину AB (базис) наиболее точным способом. Затем угломерным инструментом измеряем углы CAB и CBA. На чертеже наносим отрезок $A'B'$. На его концах соответствующим образом строим измеренные углы. Это будут внутренние углы треугольника $C'A'B'$. Находим точку C' на пересечении сторон углов. Так как расстояние AB нам известно, то мы можем найти отношение $\frac{AB}{A'B'} = m$. Умножив длину стороны $A'C'$ на m, мы найдем расстояние AC.[4] Выясним, на чем основан только что приведенный расчет.

Теорема 2.5. *Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с двумя другими сторонами новый треугольник, подобный данному.*

Доказательство. Построим произвольный треугольник ABC.[5] От вершины B на стороне AB отметим точку K. Проведем через



Чертеж 2.10. Построение треугольника подобного данному.

точку K прямую KM, параллельную AC. По теореме 2.2:

$$\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BM}.$$

Через точку M проведем прямую MF, параллельную AB. Докажем, что треугольник KBM подобен треугольнику ABC. По теореме 2.2:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{BM}.$$

[4]Множество интересных задач, которые решаются с применением признаков подобия треугольников, вы можете найти в книге «Занимательная геометрия» Я.И.Перельмана.

[5]Настоятельно рекомендуется все построения производить самостоятельно с помощью циркуля и линейки. Вспомните, как построить прямую, параллельную данной. Угольником пользоваться запрещено.

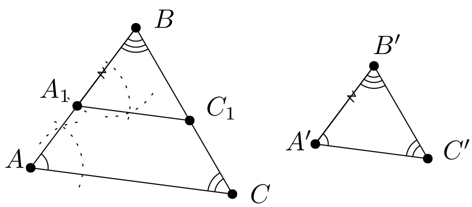
Так как $KM = AF$, то $\dfrac{AB}{KB} = \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{AC}{KM}$.

$\angle BKM = \angle BAC$, $\angle BMK = \angle BCA$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми KM и AC и секущими AB и BC. $\angle ABC$ — общий угол. Три угла равны, сходственные стороны пропорциональны, значит, треугольники подобны. Пишем: $\triangle KBM \sim \triangle ABC$.[6] $\square$

Рассмотрим признаки подобия треугольников.

Теорема 2.6. *Треугольники подобны, если углы одного равны порознь углам другого.*

Доказательство. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$. $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = B'C'A'$.
Пускай $A'B' < AB$ (см. черт. 2.11) На стороне BA отложим отре-



Чертеж 2.11. Подобные треугольники.

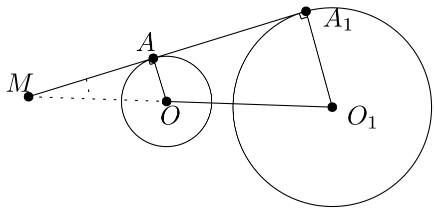
зок BA_1, равный $B'A'$. Проведем прямую A_1C_1, параллельную AC. Из предыдущей теоремы следует, что треугольники ABC и A_1BC_1 подобны. $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$, как соответственные углы, образованные секущей AB и двумя параллельными AC и A_1C_1. Тогда $\angle BA_1C_1 = \angle B'A'C'$. $\angle A_1BC_1 = \angle A'B'C'$. $A_1B = A'B'$ по построению. Треугольники A_1BC_1 и $A'B'C'$ равны, тогда $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Теорема доказана. $\square$

[6] Читаем: «треугольник KBM подобен треугольнику ABC».

Следствие. Так как третий угол треугольника равен разности двух прямых и суммы двух других углов, то для подобия треугольников достаточно равенства двух углов. Прямоугольные треугольники подобны по одному острому углу, так как прямые углы равны. □

Задача 2.5. *К двум окружностям провести общую касательную. Радиусы окружностей и расстояние между центрами считайте заданными (МЕ 233.31).*

Решение. Считаем задачу решенной. «От руки» нарисуем две окружности с центрами в точках O и O_1, и проведем к ним касательную из точки M так, что A и A_1 — точки касаний (см. черт. 2.12). Треугольники OAM и O_1A_1M — прямоугольные и



Чертеж 2.12. Касательная к двум окружностям.

подобные, так как у них общий угол с вершиной в точке M. Из подобия треугольников: $\dfrac{O_1M}{OM} = \dfrac{O_1A_1}{OA}$.

По свойству пропорции:

$$\frac{O_1M - OM}{OM} = \frac{O_1A_1 - OA}{OA} \text{ или } \frac{OO_1}{OM} = \frac{O_1A_1 - OA}{OA}.$$

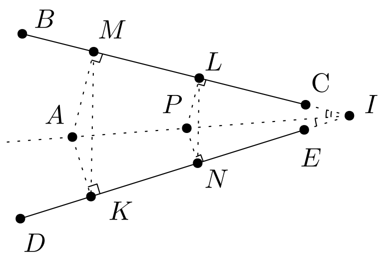
В этом уравнении неизвестной величиной является величина отрезка OM. Чтобы найти разность двух отрезков, нужно на отрезке O_1A_1 от точки A_1 отложить отрезок, равный OA. Способ поиска четвертого пропорционального отрезка OM можете найти в задаче 2.2. Найдем точку M. Далее задача сводится к решению задачи 1.21 на странице 73. Подумайте, в каких случаях данный способ применить невозможно? □

Теорема 2.7. *Треугольники подобны, если угол одного равен углу другого, и стороны, заключающие этот угол, пропорциональны.*

Доказательство. Докажите самостоятельно, опираясь на теорему 2.3. □

Задача 2.6. *Через данную точку A провести прямую, проходящую через точку пересечения прямых BC и DE, не продолжая эти прямые до пересечения (ME 233.25).*

Решение. Считаем задачу решенной. От руки продлим прямые BC и DE и найдем точку пересечения I. Проведем прямую AI. Так как точка I нам не известна, то на прямой AI нужно найти другую точку, пусть это будет точка P (см. черт. 2.13). Из точек



Чертеж 2.13. Поиск точки пересечения двух прямых BC и DE.

A и P опустим перпендикуляры на BC и DE. Получим точки M и L, K и N. Прямоугольные треугольники KAI и NPI — подобные треугольники, так как угол AIK — общий угол. Значит, $\frac{AK}{PN} = \frac{AI}{PI}$ и $\angle IAK = \angle IPN$. Аналогично прямоугольные треугольники IMA и ILP — подобные треугольники, $\frac{AM}{PL} = \frac{AI}{PI}$ и $\angle IAM = \angle IPL$. $\angle MAK = \angle IAM + \angle IAK$, $\angle LPN = \angle IPL + \angle IPN$, $\angle MAK = \angle LPN$. Треугольники MAK и LPN — подобные треугольники, так как у них равны углы и стороны, заключающие эти углы, пропорциональны ($\frac{AK}{PN} = \frac{AM}{PL}$). Из подобия треугольников заключаем, что $\angle AMK = \angle PLN$. Значит, $\angle KMC = \angle NLC$. Прямые MK и LN — параллельные прямые, так как пересекаются секущей BC под одним углом.

К решению задачи придем так: 1) опустим из точки A перпендикуляры на BC и DE; 2) M и K — основания опущенных перпендикуляров; 3) соединим точки K и M; 4) построим прямую LN, параллельную MK, точки L и N — точки пересечения прямой с прямыми BC и DE; 5) через точку N проведем прямую, параллельную AK, через точку L проведем прямую, параллельную AM; 6) найдем точку P — точку пересечения проведенных прямых; 7) проведем через точки A и P искомую прямую. □

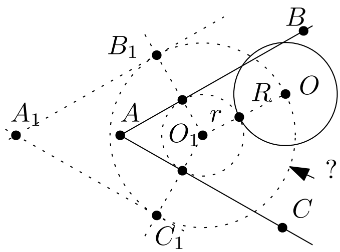
Теорема 2.8. *Треугольники подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.*

Доказательство. Докажите самостоятельно. □

Задача 2.7. *Постройте окружность так, чтобы ее касались две данные пересекающиеся прямые и другая данная окружность (ME 233.35).*

Решение. Две прямые AB и AC пересекаются в точке A, дана окружность с центром в точке O и радиусом R. Нам нужно построить окружность с центром в точке O_1 и радиусом r так, чтобы она касалась данных прямых и данной окружности (см. черт. 2.14). Считаем задачу решенной. От руки проведем искомую окружность и отметим ее центр. Из точки O_1 опустим перпендикуляры на AB и AC. Соединим точки O и O_1 отрезком.

Построим окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1O.

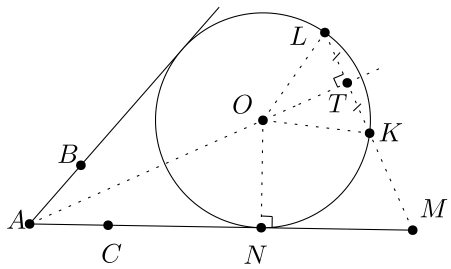


Чертеж 2.14. Построение окружности, которая касается данной окружности и двух данных прямых.

Она пересечет перпендикуляры в точках B_1 и C_1. $O_1O = O_1C_1 = O_1B_1 = r + R$. $O_1C_1 \perp AC$ по построению. Значит, расстояние от C_1 до AC равно R. Аналогично расстояние от точки B_1 до AB равно R. Через B_1 и C_1 проведем прямые, параллельные AB и AC, они пересекутся в точке A_1. Центр искомой окружности O_1 будет лежать на биссектрисе A_1A угла $B_1A_1C_1$, так как точка O_1 равноудалена от сторон угла $B_1A_1C_1$. Если найдем положение точки O_1, то задача будет решена. Для этого нам надо построить окружность так, чтобы она проходила через точку O и касалась сторон угла $B_1A_1C_1$. Но как это сделать? Нам необходимо решить еще одну задачу. □

Задача 2.8. *Даны угол и точка внутри угла. Постройте окружность так, чтобы она касалась сторон угла и проходила через данную точку.*

Решение. Дан угол BAC. Точка L лежит внутри угла. Требуется провести окружность через точку L так, чтобы она касалась сторон AB и AC (см. черт. 2.15). Считаем задачу решенной. «От руки» начертим окружность с центром в точке O, которая лежит на биссектрисе угла BAC. Из точки L опустим перпендикуляр LT на биссектрису угла BAC и продлим его до пересечения со



Чертеж 2.15. Построение окружности, которая касается двух заданных прямых и проходит через заданную точку.

стороной AC в точке M. Точка K лежит на пересечении перпендикуляра и на окружности. Она расположена на том же расстоянии от точки T, что и точка L, так как $\triangle LTO = \triangle KTO$ по общему катету OT и равным гипотенузам OL и OK. Точка N — точка касания окружности и прямой AC.

Кажется, что мы снова оказались в тупиковой ситуации. Однако, это не так. Длины отрезков LM, KM и MN находятся в особом соотношении. Найдем его. $\square$

2.4. Дуга и хорда окружности. Центральный угол. Вписанный угол

Упражнение для самостоятельного решения 18. *Задайте три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Назовите их A, B, C. Проведите через все три точки одну окружность.*[7] *Можно ли провести окружность через три точки, лежащие на одной прямой? Как будут расположены тогда серединные перпендикуляры?*

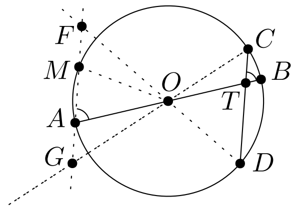
[7] Если вы не можете выполнить данное упражнение, то вернитесь на страницу 70.

Прямая, которая пересекается с окружностью, называется *секущей.* Отрезок секущей, соединяющий две точки на окружности, называется *хордой.* Если вы выполнили предыдущее упражнение, то найдите три хорды: AB, BC и AC. Часть линии окружности, которая ограничена двумя точками, называется *дугой.* Дугу окружности обозначают знаком $\smile$. Найдите дуги построенной окружности: $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile CA$. Если посмотреть на определение дуги окружности, то вы отметите две дуги AB, две дуги BC и две дуги CA. Если ведется речь о дуге и не указывается о какой именно, то подразумевают меньшую из двух. Мы говорим, что дуга AB стягивается хордой AB, $\smile BC$ стягивается хордой BC, $\smile CA$ — хордой CA. Диаметр окружности является наибольшей из хорд, так как любая хорда, не являющаяся диаметром, меньше суммы двух радиусов, а два радиуса в сумме составляют диаметр.

Задача 2.9. *В заданной окружности с центром в точке O постройте заданную хорду так, чтобы она пересекала диаметр AB под заданным углом α (не равным d), а в точке пересечения с диаметром делилась на два отрезка в заданном отношении $m : n$ (ME 233.24).*

Решение. Считаем задачу решенной (см. черт. 2.16). Заданная хорда CD пересекает диаметр AB в точке T под углом α. $\angle CTB = \alpha$. $\frac{DT}{CT} = \frac{m}{n}$.

Если какая-то фигура разбита в заданном соотношении, то нам на помощь могут придти подобные фигуры. Если подобных фигур нет, то мы можем их построить с помощью параллельных прямых. Через точку A проведем прямую, параллельную хорде CD, которая пересечет окружность в точке M. Проведем прямую CO до пересечения с построенной параллельной прямой в точке G. Проведем прямую DO до пересечения с построенной параллельной прямой в точке F. $\triangle OAG \sim \triangle OTC$ по двум углам: $\angle AOG = \angle TOC$ как вертикальные углы, а $\angle OGA = \angle OCT$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей GC и параллельными GF и CD. Аналогично $\triangle OAF \sim \triangle OTD$,



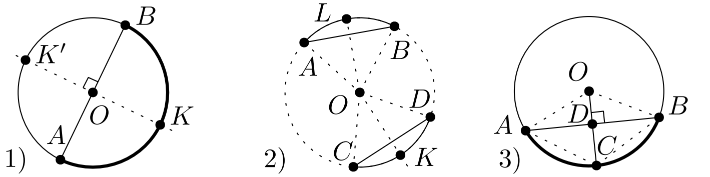
Чертеж 2.16. К задаче 2.9.

а $\triangle FOG \sim \triangle DOC$. Из подобия треугольников OAG и OTC заключаем: $\frac{OC}{OG} = \frac{CT}{AG}$. Из подобия треугольников OAF и OTD: $\frac{OD}{OF} = \frac{DT}{AF}$. Из подобия треугольников FOG и DOC: $\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OG}$. Тогда, приравняв последние три пропорции получим, что $\frac{CT}{AG} = \frac{DT}{AF}$ или $\frac{DT}{CT} = \frac{AF}{AG} = \frac{m}{n}$.

Так как треугольник FOG подобен треугольнику DOC, а сторона DO равна стороне CO как радиусы одной окружности, то $OF = OG$ (у равнобедренного треугольника подобным может быть только равнобедренный треугольник). Тогда легко выводится равенство треугольников OAG и OMF по двум сторонам и углу, лежащему против большей из сторон, а из равенства треугольников приходим к тому, что $MF = AG$. Тогда $\frac{AF-AG}{AG} = \frac{m-n}{n} = \frac{AM}{AG}$.

Алгоритм решения задачи: 1) через конец A диаметра AB проводим прямую под углом α; 2) проведенная прямая пересечет окружность в точке M; 3) находим величину отрезка AG как четвертую пропорциональную: $\frac{m-n}{n} = \frac{AM}{AG}$; 4) находим точку G; 5) от точки M (в сторону, противоположную точке A) на прямой AM откладываем отрезок MF, равный отрезку AG; 6) через точки G и O, F и O проводим две прямые; 7) две точки пересечения построенных прямых с окружностью дадут нам искомую хорду. $\square$

Теорема 2.9. *Диаметр делит линию окружности пополам. Равным хордам одной окружности соответствуют равные дуги. Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, делит хорду и дугу, стягиваемую этой хордой, пополам.*



Чертеж 2.17. 1) Диаметр делит линию окружности пополам. 2) Равным хордам одной окружности соответствуют равные дуги. 3) Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, делит хорду и дугу, стягиваемую этой хордой, пополам.

Доказательство. Дана окружность с центром в точке O и диаметром AB (см. черт. 2.17(1)). Линия окружности поделена на две дуги AB и BA. Проведем через центр окружности O прямую, перпендикулярную AB. Построенная прямая пересечет линию окружности в точках K и K'. Повернем диаметр AB вокруг центра O вместе с дугой AB и перпендикуляром OK так, чтобы точка A совместилась с точкой B. Так как $OB = OA$ и точка B лежит на одной прямой с точкой A, то точка B совестится с точкой A. Полупрямая OK совместится с полупрямой OK', а точка K совпадет с точкой K', так как $OK = OK'$. Два конца двух дуг совместились, и так как совместились еще и третьи точки, то совмещаются и дуги. $\smile AB = \smile BA$.

Дана окружность с центром в точке O и равными хордами AB и CD, меньшими диаметра окружности (см. черт. 2.17(2)). $\triangle AOB = \triangle COD$ по трем сторонам. Проведем биссектрисы углов COD и AOB до пересечения с дугами окружности в точках

K и L соответственно. Повернем треугольник COD вместе с биссектрисой OK и дугой CD вокруг центра O так, чтобы он совместился с треугольником AOB. Точка B совпадет с точкой C, точка A — с точкой D. Полупрямая OK совместится с полупрямой OL, а точка K совпадет с точкой L, так как $OK = OL$. Две различные окружности не могут иметь три общие точки, поэтому признаем совмещение дуги CD и дуги AB. $\smile AB = \smile CD$.

Дана окружность с центром в точке O и хордой AB (см. черт. 2.17(3)). Опустим перпендикуляр OD на хорду AB и продлим его до пересечения с дугой AB в точке C. По теореме 1.4 OD — серединный перпендикуляр, так как $OA = OB$. $AD = DB = \frac{1}{2}AB$. Так как точка C также лежит на серединном перпендикуляре к AB, то хорда AC равна хорде CB по теореме 1.3. По второй доказанной части теоремы $\smile AC = \smile CB$. □

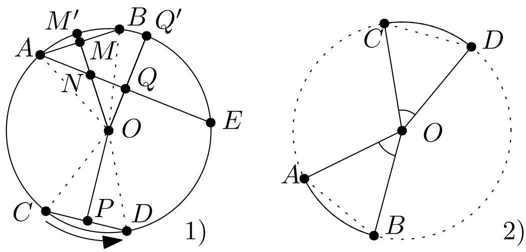
Следствие. Два перпендикулярных диаметра делят окружность на четыре равные части. □

Теорема 2.10. *В одной окружности: 1) равным дугам соответствуют равные хорды, которые одинаково удалены от центра; 2) бо́льшей дуге соответствует бо́льшая хорда, если дуга меньше полуокружности; 3) бо́льшая хорда находится ближе к центру, чем меньшая.*

Доказательство. [8] Пусть $\smile AB = \smile CD$ (см. черт. 2.18(1)). Если мы повернем дугу DC вокруг центра O так, чтобы точка D совместилась с точкой A, то, по равенству дуг, точки C и B также совместятся. Хорда DC совместится с хордой AB, значит, они равны. Если совместились хорды, то совместятся и серединные перпендикуляры OP и OM.

Пусть теперь $\smile AE > \smile CD$. Переместим дугу CD так, чтобы точка D совпала с точкой A. Точка C совпадет с точкой B и окажется между точками A и E. Опустим перпендикуляр OQ на

[8] Доказательство по Дм. Ройтману.



Чертеж 2.18. 1) Равным дугам соответствуют равные хорды. 2) Равным углам соответствуют равные дуги.

AE и продлим его до пересечения с дугой AE в точке Q'. Продлим перпендикуляр OM до пересечения с дугой AB, получим точку M'. $\smile AM' < \smile AQ'$, так как $\smile AB < \smile AE$ и $\smile AM' = \frac{1}{2}AB$, и $\smile AQ' = \frac{1}{2}AE$. Точка N — место пересечения AQ и OM. $AQ > AN$ и $AN > AM$, тогда $AQ > AM$. Так как $AE = 2AQ$ и $AB = 2AM$, то хорда AE больше хорды AB. Хорда AE будет также больше хорды CD, так как $AB = CD$. $OQ < ON$, $ON < OM$, значит, $OQ < OM$. □

Если вершина угла лежит в центре окружности, то мы говорим что данный угол является *центральным углом.*

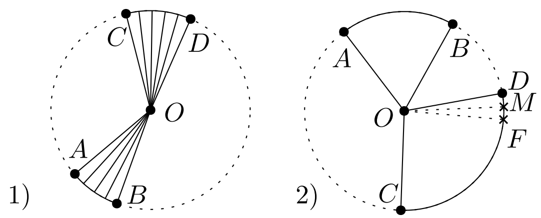
Теорема 2.11. *Равные центральные углы одной окружности заключают между своими сторонами равные дуги, и обратно, равным дугам соответствуют равные центральные углы.*

Доказательство. Угол AOB равен углу COD (см. черт. 2.18(2)). Треугольник AOB равен треугольнику COD по двум сторонам и углу между ними. $AB = DC$, тогда по теореме 2.9 $\smile AB = \smile DC$. Если обратно, то по теореме 2.10 хорда AB равна хорде DC, треугольники AOB и COD равны по трем сторонам, значит, $\angle AOB = \angle DOC$. □

Теорема 2.12. *Центральные углы одной окружности пропорциональны их дугам.*

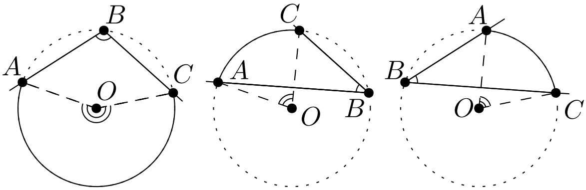
Доказательство. 1. Рассмотрим сперва случай, когда длины дуг являются соизмеримыми величинами. Допустим, дуги AB и CD являются соизмеримыми (см. черт. 2.19(1)). Общая мера дуги AB откладывается в ней m раз, а в дуге CD n раз. Отношение $\frac{\smile AB}{\smile CD}$ будет равно отношению $\frac{m}{n}$. Откладывание общей меры на дуге AB, приведет к тому, что угол AOB будет разбит на m равных углов, а угол COD на n равных углов. Отношение величины угла AOB к величине угла COD равно $\frac{m}{n}$. $\frac{\smile AB}{\smile CD} = \frac{\angle AOB}{\angle COD}$.

2. В случае несоизмеримости дуг AB и CD, допустим, что



Чертеж 2.19. 1) Соизмеримые дуги. 2) Несоизмеримые дуги.

$\frac{\angle AOB}{\angle COD} > \frac{\smile AB}{\smile CD}$. Уменьшим знаменатель во второй дроби так, чтобы они стали равны. Вместо дуги CD возьмем меньшую дугу CF так, что $\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\smile AB}{\smile CF}$ (см. черт. 2.19(2)). Разделим дугу AB на равные части, меньшие $\smile FD$. Если начнем эти части откладывать по дуге CD от точки C в направлении точки D, то наступит такой момент, когда конец новой части упадет между точками F и D в точке M. Дуга CM будет соизмерима с дугой AB. По первой доказанной части теоремы: $\frac{\angle AOB}{\angle COM} = \frac{\smile AB}{\smile CM}$. Сравнивая последнюю и первую пропорции, мы получим: $\frac{\angle COM}{\angle COD} = \frac{\smile CM}{\smile CF}$. Это невозможно, так как $\angle COM <$ $< \angle COD$, а $\smile CM > \smile CF$. Аналогично доказывается и

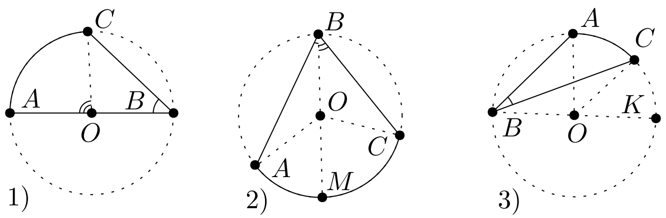


Чертеж 2.20. Вписанные углы и центральные углы, опирающиеся на ту же дугу.

невозможность варианта $\frac{\angle AOB}{\angle COD} < \frac{\smile AB}{\smile CD}$. Остается признать только то, что $\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD}$. $\square$

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а сторонами являются ее хорды. Посмотрите на чертеж 2.20. Вписанный угол ABC опирается на дугу AC, и эту же дугу заключает и центральный угол AOC (этот угол отмечен двумя дужками в каждом варианте).

Теорема 2.13. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*



Чертеж 2.21. Вписанный угол равен половине центрального угла, заключающего ту же дугу.

Доказательство.
1. Предположим, что центр окружности O лежит на стороне

AB вписанного угла CBA(см. черт. 2.21(1)). $\angle COA = \angle ABC + \angle OCB$, так как является внешним углом треугольника CBO. $\angle ABC = \angle OCB$, так как они являются углами при основании равнобедренного треугольника COB с равными боковыми сторонами OC и OB. $\angle COA = 2\angle ABC$ или $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle COA$. Угол COA измеряется дугой AC, тогда угол ABC измеряется половиной дуги AC.

2. Пусть теперь центр окружности O лежит внутри вписанного угла ABC, BO пересекает окружность в точке M (см. черт. 2.21(2)). $\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC$. Угол ABM измеряется половиной дуги AM. Угол MBC измеряется половиной дуги MC. Тогда угол ABC измеряется половиной суммы дуг AM и MC. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

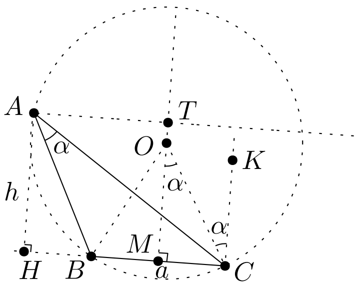
3. Наконец, если центр окружности O лежит снаружи вписанного угла ABC, где точка K — точка пересечения прямой BO с окружностью, то $\angle ABC = \angle ABK - \angle CBK$ (см. черт. 2.21(3)). $\angle ABK$ измеряется половиной дуги AK, а $\angle CBK$ измеряется половиной дуги CK; тогда $\angle ABC$ измеряется половиной разности дуг AK и CK: $\frac{\smile AK - \smile CK}{2} = \frac{\smile AC}{2}$. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. $\square$

Следствия.

1. Все вписанные углы, которые опираются на равные дуги, равны между собой.

2. Если вписанный угол — это прямой угол, то центральный угол, опирающийся на ту же дугу, равен двум прямым углам, и стороны центрального угла лежат на диаметре окружности. Вершина прямого угла треугольника, вписанного в окружность, всегда лежит на окружности, а его гипотенуза является диаметром окружности. $\square$

Задачи на построение, в которых есть сторона и противолежащий ей угол, скорее всего, решаются построением вспомогательной окружности.



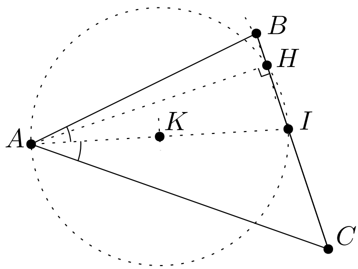
Чертеж 2.22. Построение треугольника по стороне, противолежащему углу и высоте, опущенной из вершины этого угла.

Задача 2.10. *Постройте треугольник по стороне a, противолежащему углу α и высоте h, опущенной из вершины данного угла на данную сторону или ее продолжение.*

Решение. Считаем задачу решенной. Начертим треугольник ABC, опустим высоту AH на данную сторону BC (или ее продолжение) и отметим величину известного угла BAC как α (см. черт. 2.22). Опишем окружность вокруг треугольника ABC. Опустим перпендикуляр из центра окружности O на сторону BC. MO — серединный перпендикуляр. $\angle BOC$ равен $2\angle BAC$, так как является центральным углом, заключающим дугу BC, на которую опирается вписанный угол BAC. $\angle MOC = \angle BOM = \alpha$, так как OM — биссектриса угла при вершине равнобокого треугольника BOC. Если мы проведем через точку C прямую CK, параллельную прямой OM, то $\angle KCO = \angle MOC$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные параллельными MO и KC и секущей OC. На прямой OM отметим точку T так, что $MT = h$, тогда $AT \parallel BC$, так как эти прямые отсекают равные отрезки AH и MT от параллельных прямых AH и MT.

Алгоритм решения задачи: 1) заданную сторону делим пополам; 2) из середины восстанавливаем перпендикуляр; 3) через конец стороны проводим прямую, параллельную восстановленному перпендикуляру; 4) откладываем заданный угол на этой прямой; 5) находим точку пересечения стороны отложенного угла и серединного перпендикуляра — центр описанной окружности; 6) строим окружность; 7) от основания перпендикуляра откладываем отрезок, равный заданной высоте; 8) через конец отложенного отрезка проводим прямую, параллельную заданной стороне; 9) точка пересечения построенных параллельной и окружности — это искомая точка третьей вершины треугольника. Самостоятельно задайте угол, сторону и высоту и постройте треугольник. □

Задача 2.11. *Постройте треугольник по углу, его биссектрисе и высоте, опущенной из вершины заданного угла.*



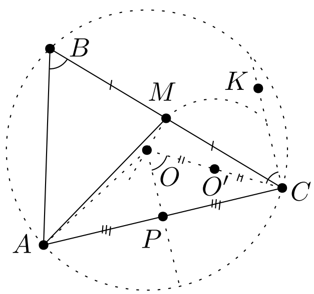
Чертеж 2.23. Построение треугольника по углу, высоте и биссектрисе, проведенных из вершины угла.

Решение. Если не знаем как решить задачу, то считаем задачу решенной. В треугольнике ABC из вершины угла BAC проведем высоту AH и биссектрису AI (см. черт. 2.23). У нас имеется прямоугольный треугольник AHI (прямой угол AHI) и его гипотенуза AI. Если известна гипотенуза прямоугольного треугольника, то мы можем построить описанную вокруг него окружность из центра гипотенузы. Линия окружности пересечет прямую BC в точке H, которая является основанием опущенной высоты.

Алгоритм решения задачи: 1) построим заданный угол; 2) разделим заданный угол пополам; 3) отложим величину заданной биссектрисы; 4) поделим построенный отрезок пополам и из его середины проведем линию окружности радиусом, равным половине отрезка биссектрисы; 5) из вершины заданного угла проведем окружность радиусом, равным заданной высоте; 6) место пересечения двух окружностей — это основание высоты; 7) через две точки (основание высоты и основание биссектрисы) проведем прямую; 8) найдем две другие вершины искомого треугольника на местах пересечения построенной прямой и сторон угла. Самостоятельно задайте угол, высоту и биссектрису и постройте треугольник. □

Упражнение 2.1. *Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и медиане, проведенной к другой стороне.*

Решение. Считаем задачу решенной (см. черт. 2.24). Нам дана



Чертеж 2.24. Построение треугольника по стороне, противолежащему углу и медиане, проведенной к другой стороне.

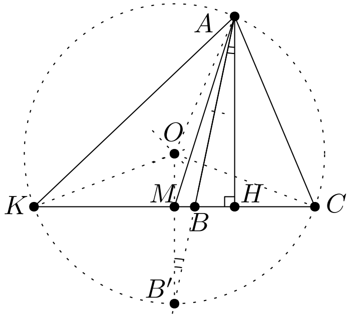
сторона AC, дан угол ABC и дан отрезок медианы AM. Опишем окружность вокруг треугольника ABC с центром в точке O. Из точки M восстановим перпендикуляр. Так как M лежит на середине отрезка BC, то точка O будет лежать на восстановленном перпендикуляре. Треугольник OMC — прямоугольный, OC — гипотенуза. Точка M будет лежать на окружности, проведенной из середины OC — точки O' и на окружности, проведенной с центром в точке A и радиусом AM. Из середины стороны AC восстановим перпендикуляр PO. Через точку C проведем прямую CK, параллельную PO. $\angle KCO = \angle POC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$.

Алгоритм решения задачи: 1) разделим сторону AC пополам и получим точку P; 2) из точки P восстановим перпендикуляр; 3) через точку C проведем прямую CK, параллельную восстановленному перпендикуляру; 4) отложим от параллельной прямой заданный угол; 5) найдем центр описанной окружности на пересечении стороны построенного угла и восстановленного перпендикуляра; 6) опишем окружность; 7) отрезок OC разделим пополам, и из его середины проведем окружность радиусом, равным его половине; 8) из точки A проведем окружность с радиусом, равным величине заданной медианы; 9) на пересечении окружностей найдем основание медианы M; 10) через точки C и M проведем прямую; 11) найдем вершину B на пересечении этой прямой и описанной вокруг треугольника окружности.

Самостоятельно задайте сторону, противолежащий угол и медиану. Постройте треугольник. □

Упражнение 2.2. *Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, опущенным из вершины этого угла.*

Решение. Считаем задачу решенной (см. черт. 2.25). В треугольнике KAC проведем известные нам отрезки медианы AM, биссектрисы AB и высоты AH. Опишем вокруг треугольника окружность с центром в точке O. Продлим биссектрису до пересечения с окружностью в точке B'. Биссектриса угла KAC делит его пополам, значит, дугу KC также делит на две равные части: $\smile KB'$ и $\smile B'C$. Опустим перпендикуляр из B' на KC.



Чертеж 2.25. Построение треугольника по биссектрисе, медиане и высоте.

Так как хорда KC стягивает дугу KC, то опущенный перпендикуляр из B' будет серединным перпендикуляром и пройдет через основание медианы AM[9]. Центр описанной окружности будет лежать на прямой $B'M$. $\angle B'MC = d$ и $\angle AHK = d$, значит, прямые $B'M$ и AH параллельны. $\angle OB'A = \angle B'AH$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AH и MB' и секущей AB'. $\angle OB'A = \angle OAB$ как углы при основании равнобедренного треугольника $B'OA$ с боковыми сторонами OB' и OA. $\triangle AHB$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB.

Алгоритм решения задачи: 1) откладываем на произвольной прямой отрезок биссектрисы AB; 2) делим биссектрису пополам и проводим из ее середины окружность с радиусом, равным ее половине; 3) с центром в начале построенной биссектрисы проводим окружность радиусом, равным величине данной высоты AH; 4) точка пересечения окружностей даст нам вершину прямого угла — основание высоты, точку H; 5) строим прямо-

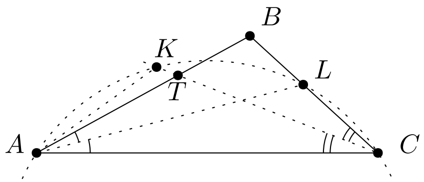
[9]Строго говоря, мы не доказывали, что перпендикуляр к хорде, проходящий через середину стягиваемой дуги, делит хорду пополам. Оставляем это доказательство читателю.

угольный треугольник AHB; 6) продлеваем прямую BH в обе стороны; 7) с центром в точке A строим окружность радиусом, равным длине медианы; 8) построенная окружность пересечет прямую BH в точке M; 9) через точку M проведем прямую, параллельную AH; 10) по другую сторону прямой AB отложим угол, равный углу BAH; 11) точка пересечения стороны построенного угла и построенной параллельной прямой, точка O — это центр описанной окружности; 12) проведем окружность с центром в точке O и радиусом OA; 13) места пресечения прямой BH и линии этой окружности дадут нам две другие вершины искомого треугольника.

Самостоятельно задайте медиану, высоту, биссектрису и постройте треугольник. В каком случае будет множество решений? □

Задача 2.12. *Если две биссектрисы треугольника равны, то треугольник равнобедренный. Докажите.*[10]

Решение. Дан произвольный треугольник ABC (см. черт. 2.26). Примем, что $\angle BAC < \angle BCA$. Величину угла BAC примем за



Чертеж 2.26. Две биссектрисы треугольника.

α, величину угла BCA за β, тогда $\alpha < \beta$. Из вершины угла A проведем биссектрису AL. Через три точки A, L, C проведем окружность. На середине дуги AL отметим точку K так, чтобы $\smile AK = \smile KL$. Луч CK является биссектрисой угла LCA и

[10] Теорема Штейнера-Лемуса.

угла BCA. $\angle KAL = \angle LCK = \dfrac{\beta}{2}$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу KL. $\angle KAC = \angle KAL + \angle LAC = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$. По условию задачи $\alpha < \beta$, тогда $\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}$.

$$\angle KAC < \angle BCA.$$

По величинам углов делаем заключение о величинах хорд, стягивающих дуги соответствующих углов: $CK < AL$.

Так как угол BAC меньше угла KAC ($\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$), то точка пересечения прямых AB и KC лежит на отрезке KC. $KT + TC = KC$.

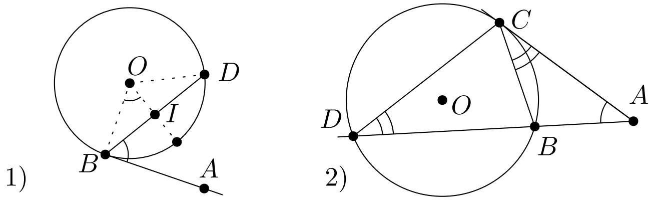
$$CT < CK < AL.$$

Можем сделать вывод, что большему углу соответствует меньшая биссектриса треугольника, а меньшему углу — бóльшая. К аналогичному выводу мы бы пришли, если бы приняли $\angle BAC > \angle BCA$. При равенстве биссектрис мы можем принять только равенство углов. Равенство двух углов — это признак равнобедренного треугольника. $\square$

Самостоятельно докажите обратное: в равнобедренном треугольнике отрезки биссектрис углов при основании равны.

Теорема 2.14. *Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.*

Доказательство. Точка касания прямой AB и окружности с центром в точке O — точка B. Через точку B проходит хорда DB (см. черт. 2.27(1)). Из центра окружности опустим перпендикуляр OI на хорду BD. Обозначим величину угла IOB через α, тогда угол $OBI = d - \alpha$. Так как угол $OBA = d$, то $\angle DBA = \angle OBA - \angle OBI = d - (d - \alpha) = \alpha = \angle IOB$ и измеряется половиной дуги DB. $\square$



Чертеж 2.27. 1) Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами. 2) Касательная есть средняя пропорциональная между секущей и ее внешней частью.

Теорема 2.15. *Касательная есть средняя пропорциональная между секущей и ее внешней частью.*[11]

Доказательство. Из точки A к окружности с центром в точке O провели касательную AC и секущую AD. Секущая пересекает окружность в точках D и B (см. черт. 2.27(2)). Рассмотрим треугольники ABC и ACD. $\angle CAD = \angle CAB$ — общий угол в двух треугольниках. $\angle ACB$ измеряется половиной дуги CB, так как AC — касательная, а CB — хорда. $\angle CDB$ измеряется половиной дуги CB как вписанный угол. $\angle CDB = \angle ACB$. Треугольник ABC подобен треугольнику ACD по двум углам. Из подобия треугольников мы можем вывести следующее соотношение:

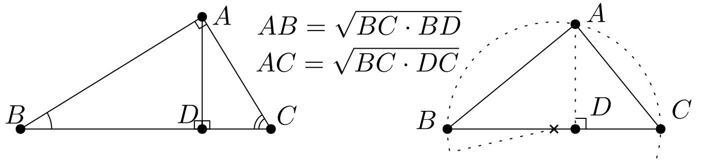
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \text{ или } AC = \sqrt{AD \cdot AB}.$$

□

Наконец, мы нашли соотношение, с помощью которого можем решить задачу 2.8 на странице 93. Как найти величину отрезка, которая является средней пропорциональной двух других величин отрезков? В этом нам поможет прямоугольный треугольник.

[11] Средняя пропорциональная — это величина, которая одновременно является вторым и третьим членом пропорции.

Теорема 2.16. *Катет прямоугольного треугольника — это средняя пропорциональная величина между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.*



Чертеж 2.28. Средняя пропорциональная величина.

Доказательство. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ABC опустим высоту AD на гипотенузу BC (см. черт. 2.28). Рассмотрим треугольники BAC и BDA. Эти треугольники — прямоугольные. Угол B — общий. Заключаем, что $\triangle BAC \sim \triangle BDA$. Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \text{ или } AB = \sqrt{BC \cdot BD}.$$

Аналогичный вывод будет и для катета AC: $AC = \sqrt{BC \cdot DC}$.

□

Если конец одного отрезка совпадает с концом другого, и меньший отрезок полностью лежит внутри бóльшего, то для нахождения их средней пропорциональной необходимо: 1) найти середину бóльшего отрезка; 2) провести окружность с центром в найденной середине и радиусом, равным половине бóльшего отрезка; 3) из конца меньшего отрезка, не совпадающего с концом бóльшего, восстановить перпендикуляр; 4) найти точку пересечения восстановленного перпендикуляра и построенной окружности; 5) соединить найденную точку с общей точкой двух отрезков; 6) построенный отрезок и есть искомая средняя пропорциональная величина (см. черт. 2.28).

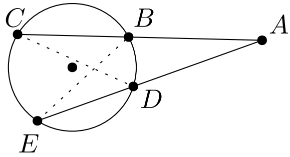
Продолжение решения задачи 2.8 на стр. 93. Алгоритм решения задачи: 1) проводим биссектрису угла BAC; 2) из точки L опускаем перпендикуляр LT на биссектрису угла BAC и продолжаем его до пересечения со стороной угла AC в точке M; 3) от точки T на перпендикуляре отмечаем отрезок TK, равный отрезку LT; 4) находим среднюю пропорциональную величину отрезков LM и KM; 5) откладывая найденную величину от точки M на стороне AC, найдем точку N; 6) из точки N восстанавливаем перпендикуляр к стороне угла; 7) точка пересечения перпендикуляра и биссектрисы угла даст нам центр искомой окружности. Подумайте, сколько окружностей можно вписать таким способом. □

Продолжение решения задачи 2.7 на стр. 92. Алгоритм решения задачи: 1) для каждой стороны угла BAC, на расстоянии, равном радиусу данной окружности с центром в точке O, проведем прямые, им параллельные: A_1B_1 и A_1C_1; 2) из точки пересечения параллельных прямых проведем биссектрису угла $B_1A_1C_1$; 3) из точки O опустим перпендикуляр на построенную биссектрису и найдем центр искомой окружности O_1 по алгоритму для задачи 2.8 на стр. 112; 4) соединим точки O и O_1, получим точку касания двух окружностей; 5) проведем искомую окружность. □

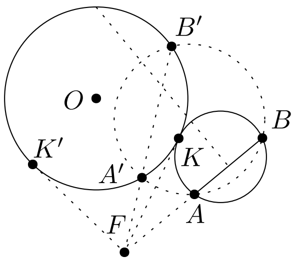
Теорема 2.17. *Две секущие, проведенные из одной точки вне окружности, делятся в точках пересечения с окружностью так, что длины секущих обратно пропорциональны своим внешним отрезкам.*

Доказательство. Смотрите чертеж 2.29. Нужно доказать, что $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$ или $AC \cdot AB = AE \cdot AD$. Найдите и рассмотрите подобные треугольники. Докажите самостоятельно. □

Задача 2.13. *Описать окружность так, чтобы она проходила через данные точки A и B и касалась данной окружности (ME 233.33).*



Чертеж 2.29. Две секущие, проведенные из одной точки вне окружности.



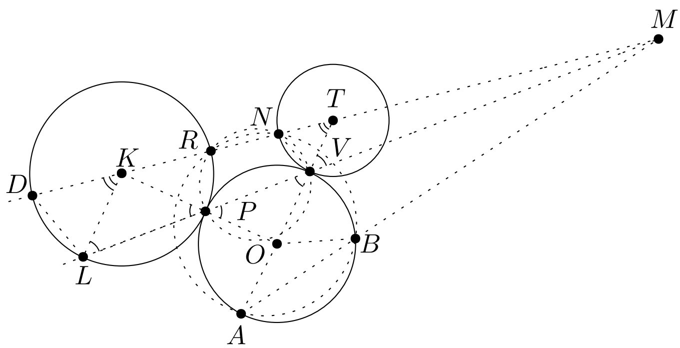
Чертеж 2.30. Описать окружность так, чтобы она проходила через данные точки A и B и касалась данной окружности.

Решение. Дана окружность с центром в точке O (см. черт. 2.30). Также даны точки A и B, через которые должна пройти искомая окружность. Считаем задачу решенной. «От руки» проведем окружность через точки A и B так, чтобы она касалась данной окружности в точке K. Через произвольные точки A' и B' на данной окружности проведем прямую так, чтобы она пересеклась с прямой AB в точке F. FB и FB' — секущие, FK — касательная к обеим окружностям. $FK^2 = FB' \cdot FA'$ и $FK^2 = FB \cdot FA$. $FB' \cdot FA' = FB \cdot FA$. Точки A', B', A, B лежат на одной окружности на секущих FB и FB'.[12]

[12]Это утверждение опирается на теорему, обратную теореме 2.17. Доказательство оставляем читателю.

Разворачиваем решение задачи в обратном порядке: 1) восстановим перпендикуляр из середины отрезка AB; 2) выберем на перпендикуляре такую точку, чтобы построенная окружность с центром в этой точке пересекала данную окружность в некоторых точках A', B' и проходила через данные точки A и B; 3) проведем прямую через точки A' и B', и найдем точку пересечения F с прямой AB; 4) из точки F проведем две касательные к данной окружности с центром в точке O; 5) отметим точки касаний K и K'; 6) проведем искомую окружность через три точки A, B и K (или A, B и K'). □

Задача 2.14. *Описать окружность так, чтобы она проходила через данную точку A и касалась двух данных окружностей, не имеющих общих точек (МЕ 233.36).*



Чертеж 2.31. Описать окружность так, чтобы она проходила через данную точку A и касалась двух данных окружностей, не имеющих общих точек.

Решение. Даны окружности с центрами в точках K и T, дана точка A. Надо провести через точку A окружность так, чтобы она касалась данных окружностей.

Считаем задачу решенной. Проведем искомую окружность, отметим ее центр O и точки касания P и V (см. черт. 2.31). Проведем две прямые: одну через центры двух окружностей, а другую через точки касания P и V. Точка пересечения двух построенных прямых — это точка M. Точка L — точка пересечения прямой PV и окружности с центром в точке K. $\angle KLP = \angle KPL$ как углы при основании равнобедренного треугольника. $\angle KPL = \angle VPO$ как вертикальные углы, аналогично $\angle VPO = \angle PVO$. $\angle PVO = \angle MVT$. Треугольник MLK подобен треугольнику MVT, так как у них два равных угла ($\angle KLM = \angle MVT$, $\angle TMV$ — общий). Из подобия треугольников: $\frac{MK}{MT} = \frac{KL}{TV}$. $KL \parallel TV$, так как они пересекают одну прямую ML под одним углом. KL и TV — известные нам радиусы данных окружностей. Прямая MK пересекает окружность с центром в точке T в точке N и окружность с центром в точке K в точках D и R.

Треугольники DKL и NTV — равнобедренные треугольники. $\angle DKL = \angle NTV$, так как $KL \parallel TV$, и они пересекаются секущей MD. Углы при вершине равнобедренных треугольников равны, значит, углы при основании также равны. $\angle KDL = \angle TNV$. Треугольники MDL и MNV — подобные треугольники. $\frac{ML}{MV} = \frac{MD}{MN}$ или $ML \cdot MN = MV \cdot MD$. По свойству секущих к окружности с центром в точке K: $MD \cdot MR = ML \cdot MP$. Перемножаем два последних равенства: $ML \cdot MN \cdot (MD \cdot MR) = MV \cdot MD \cdot (ML \cdot MP)$. $MN \cdot MR = MV \cdot MP$. Если MR и MP примем за секущие некоторой окружности, то точки R, N, P, V лежат на одной линии окружности.

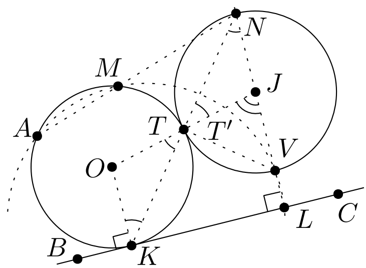
$MV \cdot MP = MB \cdot MA$ по свойству секущих к окружности в точке O. $MN \cdot MR = MB \cdot MA$, значит, точки R, N, A, B также лежат на одной линии окружности.

Алгоритм решения задачи: 1) составляем отношение $\frac{KL}{TV} = \frac{MK}{MT}$ или $\frac{KL-TV}{TV} = \frac{KT}{MT}$ (вспомните задачу 2.5 на стр. 90); 2) по составленному отношению находим четвертую пропорциональную MT (см. задачу 2.2 на стр. 79); 3) продлеваем прямую KT

и от точки T откладываем найденную величину отрезка MT; 4) отмечаем точку M; 5) находим точки R и N на пересечении линии центров KT и линий двух окружностей с центрами в точках K и T; 6) через данную точку A и две найденные точки R и N проводим линию окружности (вспомните, как построить окружность по трем точкам); 7) на этой окружности находится также точка B; 8) соединим прямой точки A и M — найдем точку B; 9) задача сводится к проведению линии окружности через две заданные точки так, чтобы она еще касалась и заданной окружности (см. задачу 2.13 на стр. 112). □

Задача 2.15. *Описать окружность так, чтобы она проходила через заданную точку A и касалась окружности с центром в точке J и прямой BC (ME 233.37).*

Решение. Считаем задачу решенной. Проведем искомую окружность с центром в точке O. Соединим центры касающихся окружностей отрезком OJ. Точка T — точка касания окружностей. Опустим перпендикуляры OK и JL из центров на прямую BC (см. черт. 2.32). Перпендикуляр JL пересекает



Чертеж 2.32. Описать окружность так, чтобы она проходила через точку A и касалась окружности J и прямой BC.

окружность с центром в точке J в точках N и V. Соединим точки N и K. Прямая NK пересечет OJ в некоторой точке

T'. $\triangle KOT' \sim \triangle NJT'$ по двум углам ($\angle KT'O = \angle NT'J$ как вертикальные углы, $\angle OKT' = \angle JNT'$ как внутренние накрест лежащие, образованные секущей NK и параллельными OK и NL). Из подобия треугольников: $\frac{OT'}{JT'} = \frac{OK}{JN}$. $\frac{OK}{JN} = \frac{OT}{JT}$ как отношения радиусов двух окружностей. Точка T' делит отрезок линии центров OJ в том же соотношении, что и точка касания T. Значит, точки T' и T — одна точка.

$\angle TJV = 2\angle TNV$, как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну дугу. Треугольник TJV — равнобедренный треугольник. $\angle JTV = \frac{(2d - \angle TJV)}{2} = d - \frac{1}{2}\angle TJV = d - \angle TNV = d - \angle NTJ$, т.е. $\angle NTJ + \angle JTV = \angle NTV = d$. Треугольник NTV — прямоугольный треугольник.

$\triangle NTV \sim \triangle NLK$, так как у них общий острый угол KNL. Из подобия треугольников: $\frac{NK}{NV} = \frac{NL}{NT}$ или $NK \cdot NT = NL \cdot NV$.

Соединим точку A с точкой N. NK и NA — две секущие окружности с центром в точке O. $NK \cdot NT = NA \cdot NM$. Так как $NK \cdot NT = NL \cdot NV$, то $NA \cdot NM = NL \cdot NV$. Точки A, V, L, M лежат на одной линии окружности.

Алгоритм решения задачи: 1) из центра окружности J опустим перпендикуляр JL на прямую BC; 2) продлим построенный перпендикуляр и найдем точки N, V; 3) соединим точки A и N; 4) проведем окружность через три точки A, V и L; 5) на месте пересечения построенной окружности и прямой AN найдем точку M; 6) задача свелась к решению задачи 2.13 на стр. 112. Самостоятельно задайте окружность, точку, прямую, и решите задачу. □

Контрольное упражнение 3.

1. Самостоятельно задайте отрезок и разделите его в отношении $4:3$.

2. Задайте отрезок a *и отрезок* b *так, чтобы* $b \leq \frac{1}{2}a$. *Отрезок* a *произвольно разделили на две части. Примите отрезок* b *за среднюю пропорциональную двух частей отрезка* a *и найдите их. Объясните почему отрезок* b *должен быть меньше или равен половине отрезка* a.

3. Постройте два отрезка, зная их разность d и среднюю пропорциональную между ними m (ME 233.12).

4. Дана точка M, лежащая внутри угла BAC. Постройте отрезок MN так, чтобы сторона угла делила отрезок MN в таком отношении: $\frac{MN}{NL} = \frac{m}{n}$. Точка L — точка пересечения отрезка MN и стороны угла (ME 233.17).[*13]

5. Постройте треугольник по трем медианам.[*14]

6. Через точку M внутри окружности провести хорду так, чтобы она делилась в отношении $m : n$ (ME 233.21).[*15]

7. В окружности даны два радиуса OA и OB. Постройте хорду так, чтобы она делилась радиусами на три равные части (ME 233.22).[*16]

8. Дан угол BAC и точка P между его сторонами. Дан произвольный треугольник DEF. Постройте треугольник MNP так, чтобы он был подобен треугольнику DEF, а точки M и N лежали на двух сторонах угла BAC (ME 233.28).[*17]

9. Даны две точки и прямая, через них не проходящая. Постройте окружность так, чтобы она проходила через две заданные точки и касалась данной прямой.

10. Опишите окружность так, чтобы она касалась прямой PQ и двух данных окружностей с радиусами R и r. Расстояние между центрами данных окружностей больше $R + r$ (ME

[13]Считайте задачу решенной. Через точку M проведите прямую, параллельную стороне угла.

[14]Считайте задачу решенной. Продлите одну медиану от ее основания на третью часть. Соедините конец построенного отрезка с вершиной треугольника. Найдите, чему равен соединяющий отрезок.

[15]Считайте задачу решенной. Один конец хорды соедините прямой с центром окружности, а через другой конец проведите параллельную ей прямую. Найдите подобные треугольники.

[16]Считайте задачу решенной. Через точки A и B проведите прямую.

[17]Опишите на стороне DF дугу, соизмеримую с углом CAP. Опишите на стороне EF дугу, соизмеримую с углом BAP. Дуги пересекутся в точке F и некоторой новой точке O. Постройте отрезки OD, OE, OF. Найдите на сторонах угла BAC точки M и N так, чтобы выполнялись соотношения: $\frac{OD}{AM} = \frac{OF}{AP}$ и $\frac{OE}{AN} = \frac{OF}{AP}$.

233.38). *[18]

11. Постройте окружность так, чтобы она касалась трех данных окружностей радиусами с R_1, R_2, R_3. Данные окружности не пересекаются (ME 233.39).

12. Две пересекающиеся хорды делятся на части, обратно пропорциональные. AB и CD — две хорды одной окружности. M — точка пересечения данных хорд. Докажите, что $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{MB}$.

13. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам угла. Докажите. *[19]

14. В данный угол α *впишите окружность данного радиуса* R. *[20]

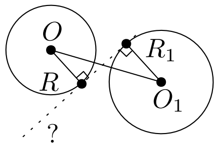
15. Внутренняя общая касательная к двум окружностям — это прямая, которая является касательной к двум окружностям, а окружности лежат по разные от нее стороны. К двум данным окружностям с центрами в точках O *и* O_1 *постройте внутреннюю общую касательную. Радиусы окружностей и расстояние между их центрами задайте самостоятельно (см. черт. 2.33).*

16. Дан треугольник ABC (см. черт. 2.34). Окружность с центром в точке O — вписанная в треугольник окружность, где точки M, N, P — точки касаний. Окружность с центром

[18] Считайте задачу решенной. Проведите из центра искомой окружности новую окружность так, чтобы она проходила через центр меньшей известной окружности. Постройте прямую, параллельную PQ, так, чтобы она касалась новой окружности.

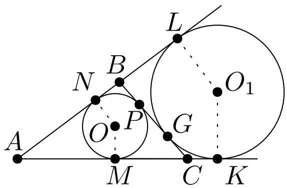
[19] Продлите линию биссектрисы. Опустите на нее перпендикуляры из двух других вершин. Найдите две пары подобных треугольников и рассмотрите их.

[20] Первый вариант: построить вписанную окружность произвольного радиуса, и найти расстояние от вершины угла до центра искомой окружности как четвертую пропорциональную. Второй вариант: построить произвольную вписанную окружность; из центра произвольной окружности провести окружность искомого радиуса; провести к ней касательные прямые, параллельные сторонам угла; рассмотреть подобные треугольники, и найти чему равно расстояние от центра произвольной окружности к центру искомой окружности.



Чертеж 2.33. Постройте внутреннюю общую касательную.

в точке O_1 — внешне вписанная окружность,[21] *где точки G, L, K — точки касаний. Докажите, что отрезок AK равен полупериметру p треугольника ABC и $AM = p - BC$ (ME 270.14).*



Чертеж 2.34. Вписанная и внешне вписанная окружности.

17. Постройте треугольник по его периметру $2p$, одному из углов α и радиусу вписанной окружности r (ME 271.10).
18. Постройте треугольник так, чтобы отрезок, делящий один из его углов пополам, был равен b; высота, опущенная из вершины этого угла, была равна h; радиус описанной окружности был равен R (ME 271.11).

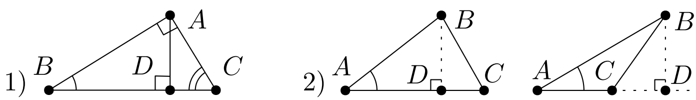
[21] Окружность является внешне вписанной (вневписанной) в треугольник, если она касается одной его стороны и продолжений двух других сторон.

2.5. Теорема Пифагора

Еще раз взглянем на прямоугольный треугольник ABC с высотой AD (см. черт. 2.35(1)). Отметим, что $\triangle ADC \sim \triangle BAC$: $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$, $AC^2 = BC \cdot DC$. $\triangle BDA \sim \triangle BAC$: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$, $AB^2 = BC \cdot BD$. Сложим квадраты катетов: $AC^2 + AB^2 = BC \cdot DC + BC \cdot BD = BC \cdot (BD + DC) = BC^2$.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Теорема 2.18 (Теорема Пифагора)**.** *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*



Чертеж 2.35. 1) Прямоугольный треугольник. 2) Острый угол треугольника и высота, опущенная из вершины другого угла.

Зная две стороны прямоугольного треугольника, мы всегда можем найти третью.

Давайте найдем соотношение между сторонами остроугольного и тупоугольного треугольников. Дан треугольник ABC, в котором угол A — острый угол.[22] Опустим перпендикуляр BD на сторону AC (см. черт. 2.35(2)). $BC^2 = BD^2 + DC^2$, а в прямоугольном треугольнике ADB: $BD^2 = AB^2 - AD^2$. $DC = AC - AD$, значит, $DC^2 = (AC - AD)^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD$.

$$BC^2 = (AB^2 - AD^2) + (AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD);$$

$$BC^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD.$$

Аналогичный вывод будет, если опущенная высота будет лежать вне треугольника ABC.

[22] Напомним, острый угол — угол, меньший прямого угла.

Во всяком косоугольном[23] треугольнике *квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения основания на отрезок от вершины острого угла до основания высоты.*

Для квадрата стороны, лежащей против тупого угла треугольника, верно следующее: *квадрат стороны, лежащей против тупого угла,*[24] *равен сумме квадратов двух других сторон плюс удвоенное произведение основания на отрезок от вершины тупого угла до основания высоты.*[25]

Верно и обратное: *угол треугольника будет острый, прямой или тупой, в зависимости от того, будет ли квадрат противолежащей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон, равен этой сумме или больше нее.*[26] Этот факт позволяет по величинам трех сторон судить о том, является треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным.

Упражнение для самостоятельного решения 19. *Даны отрезки a и c. Найдите отрезок x, который равен $\frac{a^2}{c}$. Подсказка: $\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$. Постройте прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетом a. Опустите высоту. Догадываетесь, где найти x?*

Упражнение для самостоятельного решения 20. *Даны отрезки a и b. Найдите корни квадратного уравнения $x^2 - ax + b^2 = 0$ в виде отрезков. Подсказка: $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$. Постройте окружность диаметром a. Отметьте, что ее радиус равен $\frac{a}{2}$. На расстоянии b проведите прямую, параллельную диаметру. Постройте прямоугольный треугольник с катетом $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$. Найдите на диаметре отрезок, равный $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, и отрезок, равный $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$.*

---

[23] Треугольник, в котором нет прямого угла.

[24] Тупой угол — угол, больший прямого и меньший суммы двух прямых.

[25] Доказывается аналогично случаю с острым углом.

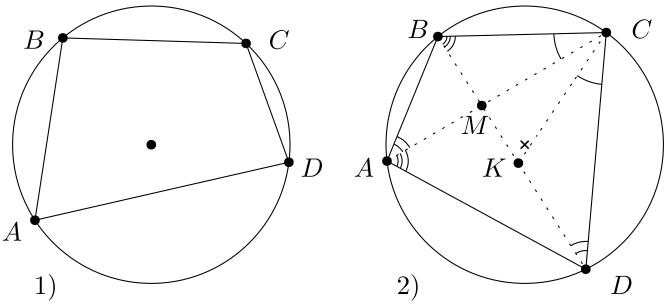
[26] Доказывается от противного.

Глава 3.

Выпуклый четырехугольник. Площадь. Отношение длины окружности к ее диаметру

3.1. Выпуклый четырехугольник

Четырехугольником называют плоскую замкнутую фигуру, ограниченную четырьмя прямыми. Четырехугольник называется *выпуклым*, если он весь расположен по одну сторону от каждой своей стороны. Мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники. Окружность вписана в четырехугольник, если она касается всех его сторон. Окружность описана около четырехугольника, если она проходит через вершины всех его углов. На чертеже 3.1(1) показан четырехугольник $ABCD$, вокруг



Чертеж 3.1. Четырехугольник, вписанный в окружность.

которого описана окружность. Вписанный угол BAD опирается на дугу BCD и измеряется ее половиной. Вписанный угол BCD опирается на дугу BAD и измеряется ее половиной. Так как две дуги BCD и BAD составляют окружность, то сумма углов BCD и BAD составляет $\frac{4d}{2} = 2d$. Сумма углов ABC и ADC также равна $2d$. Вывод: *если сумма противолежащих углов четырехугольника равна $2d$, то вокруг четырехугольника можно описать окружность.*[1]

Теорема 3.1. *Во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей*[2] *равно сумме произведений противоположных сторон.*[3]

Доказательство. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Отрезки AC и BD — две диагонали четырехугольника $ABCD$. Нужно доказать, что $AC \cdot BD = (AB \cdot CD) + (AD \cdot BC)$ (см. черт. 3.1(2)).

---

[1] Доказывается от противного.

[2] *Диагональю четырехугольника* называется отрезок, соединяющий вершины двух углов, не прилежащих к одной стороне.

[3] Теорема Птоломея.

От стороны CD из вершины C отложим угол, равный углу BCA. Построенный луч пересечет диагональ BD в точке K. $\angle KCD = \angle BCA$. $\angle BAC = \angle BDC$, так как они опираются на одну дугу. Треугольники ABC и DKC — подобные треугольники по двум равным углам. Из подобия треугольников: $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DK}$.

$\triangle ACD \sim \triangle BCK$, так как $\angle ACD = \angle ACK + \angle KCD = \angle ACK + \angle BCA = \angle BCK$. $\angle CAD = \angle CBD$ как опирающиеся на одну дугу. Из подобия треугольников: $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BK}$.

$$AC \cdot DK = AB \cdot DC;$$

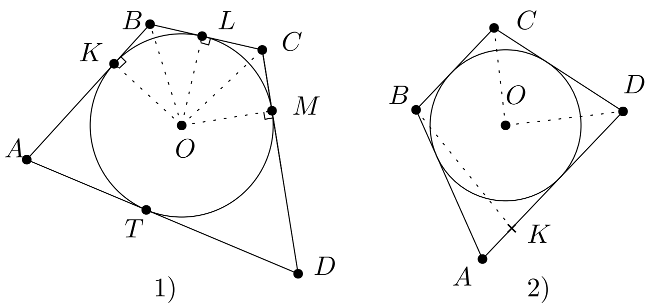
$$AC \cdot BK = AD \cdot BC;$$

$$AC \cdot (DK + BK) = AB \cdot DC + AD \cdot BC;$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

□

Теорема 3.2. *Во всяком четырехугольнике, в который вписана окружность, суммы противоположных сторон равны между собой.*



Чертеж 3.2. Окружность, вписанная в четырехугольник.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ со вписанной окружностью с центром в точке O (см. черт. 3.2(1)). Из центра окружности опустим перпендикуляры OK, OL, OM, OT на стороны AB, BC, CD и AD. Соединим отрезками точку O с точками B и C. Прямоугольные треугольники BKO и BLO равны по катету и гипотенузе. $KB = BL$. Аналогично $LC = CM$, $MD = DT$, $AK = AT$.

$$AK + KB + CM + MD = AT + BL + LC + DT;$$

$$AB + CD = BC + AD.$$

□

Обратно. Во всякий четырехугольник, в котором суммы противоположных сторон равны, можно вписать окружность.

Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB + CD = BC + AD$. Мы можем вписать окружность с центром в точке O так, чтобы она касалась сторон BC, CD, AD. Для этого надо провести биссектрисы углов BCD и CDA, тогда центр окружности O будет лежать на пересечении этих биссектрис (см. черт. 3.2(2)). Допустим, что построенная окружность O не касается стороны AB. Из точки B проведем касательную BK к окружности. По только что доказанной теореме: $BK + CD = BC + KD$. Так как $AB < BK + AK$, получаем:

$$(BK + CD) + AB < (BC + KD) + (BK + AK);$$

$$AB + CD < BC + (AK + KD).$$

Этот вывод противоречит условию теоремы. Нам остается признать, что окружность касается и стороны AB. □

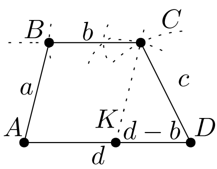
Разберем отдельные виды выпуклых четырехугольников. Все, что мы доказали для выпуклых четырехугольников вообще, будет справедливо и для различных их видов.

3.2. Трапеция

Определение 3.1. *Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.*

Две непараллельные стороны называются боковыми сторонами трапеции.

Задача 3.1. *Построить трапецию по четырем данным сторонам.*



Чертеж 3.3. Построение трапеции по четырем сторонам.

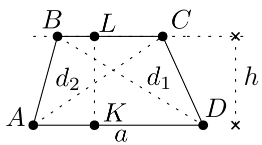
Решение. Считаем задачу решенной. Нам дана трапеция $ABCD$. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AD \parallel BC$ (см. черт. 3.3). Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Она пересечет прямую AD в точке K. $AB = KC$, тогда, чтобы найти точку C, необходимо с центром в точке K провести окружность радиусом, равным a, и с центром в точке D провести окружность радиусом, равным c. На пересечении окружностей найдем точку C.

Алгоритм решения задачи: 1) на произвольной прямой отмечаем отрезок AD величиной d; 2) на отрезке AD находим отрезок KD как разность отрезков d и b; 3) из точки D проводим окружность радиусом c, из точки K проводим окружность радиусом a; 4) на пересечении окружностей найдем точку C; 5) через точку C проведем прямую, параллельную AD; 6) от точки C, с раствором циркуля величиной b, отметим на проведенной прямой точку B в сторону к точке A; 7) соединим точки, трапеция построена.

Если $d-b$ больше $a+c$, то точку C невозможно построить. □

Высотой трапеции называется перпендикуляр, который опущен из точки одной из параллельных сторон на другую. Последняя сторона тогда называется *основанием*.

Задача 3.2. *Построить трапецию по основанию, высоте и двум диагоналям.*



Чертеж 3.4. Построение трапеции по основанию, высоте и диагоналям.

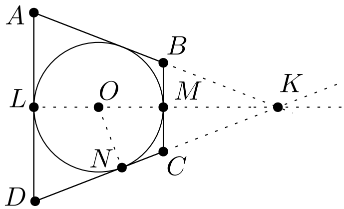
Решение. Дано основание трапеции a, даны диагонали d_1 и d_2 и высота h. Считаем задачу решенной. $ABCD$ — искомая трапеция. Из точки K на основании восстановим перпендикуляр KL. $KL = h$.

Алгоритм решения задачи: 1) на произвольной прямой отложим отрезок AD, равный a; 2) из точек A и D проведем окружности радиусами d_2 и d_1; 3) из любой точки на прямой AD восстановим перпендикуляр и отложим на нем величину заданной высоты, получим точку L; 4) через точку L, проведем прямую, параллельную AD, в местах пересечения с окружностями найдем точки B и C. □

Если боковые стороны трапеции равны, то она называется *равнобокой* или *равнобедренной*. Самостоятельно докажите, что углы при основании равнобокой трапеции равны. В любой равнобедренный треугольник можно вписать окружность, и, очевидно, что мы можем провести прямую, которая одновременно будет параллельна основанию равнобедренного треугольника и будет касательной к вписанной окружности. Значит, существует равнобокая трапеция, в которую возможно вписать окружность.

Задача 3.3. *Если в равнобокую трапецию вписана окружность, то диаметр окружности будет средней пропорциональной между параллельными сторонами трапеции. Докажите.*

Решение. Нам даны равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB = DC$, $AD \parallel BC$) и вписанная в нее окружность с центром в точке O (см. черт. 3.5). Точка N — точка касания вписанной окружности



Чертеж 3.5. Диаметр окружности, вписанной в равнобокую трапецию — средняя пропорциональная между параллельными сторонами.

и боковой стороны трапеции DC. Продлим боковые стороны до пересечения в точке K. KO — биссектриса угла AKD, которая пересечет AD в точке L. $\angle KAD = \angle KDA$ как углы при основании равнобокой трапеции. Треугольник AKD — равнобедренный треугольник. KL является биссектрисой угла AKD и высотой, опущенной из вершины K на сторону AD. Так как точка O лежит на KL, то $OL \perp AD$, а так как AD является касательной к окружности, то точка L является точкой касания. Если мы продлим перпендикуляр OL, то он пересечет прямую BC в точке M под прямым углом, так как $AD \parallel BC$. $OM \perp BC$. Аналогично точка M — точка касания окружности с центром в точке O и стороны BC. Так как точка M лежит на перпендикуляре LO, а точки L и O на биссектрисе KL, то точка M также лежит на биссектрисе KL. $\triangle KLD \sim \triangle KNO \sim \triangle KMC$, так как это прямоугольные треугольники с общим острым углом. Из подобия треугольников: $\frac{LD}{NO} = \frac{KL}{KN}$, $\frac{NO}{MC} = \frac{KN}{KM}$. Так как KL — секущая, а KN — касательная к одной окружности, то $\frac{KL}{KN} = \frac{KN}{KM}$. Следовательно, $\frac{LD}{NO} = \frac{NO}{MC}$. Можем записать так: $\frac{2LD}{2NO} = \frac{2NO}{2MC}$ или $\frac{AD}{2NO} = \frac{2NO}{BC}$. $\square$

Упражнение для самостоятельного решения 21. *Диагонали равнобокой трапеции равны. Докажите.*

Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Упражнение для самостоятельного решения 22. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. Докажите.*[4]

Упражнение для самостоятельного решения 23. *В произвольной трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Докажите.*[5]

3.3. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат

Определение 3.2. *Параллелограмм — это четырехугольник, в котором противоположные стороны параллельны.*

Упражнение для самостоятельного решения 24. *Пользуясь определением параллелограмма постройте его с помощью циркуля и линейки.*

[4] Сперва докажите, что она параллельна основаниям. Вспомните тему про пропорциональные отрезки. Опустите две высоты и рассмотрите подобные треугольники.

[5] Найдите подобные треугольники по двум углам и рассмотрите их.

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из точки одной из параллельных сторон на другую. Последняя сторона называется *основанием* параллелограмма.

Теорема 3.3. *Во всяком параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны, сумма двух соседних углов равна* $2d$.

Доказательство. Докажите самостоятельно. Проведите в параллелограмме диагонали и рассмотрите построенные треугольники. □

Теорема 3.4. *Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны или только две стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник является параллелограммом.*

Доказательство. Проведите в четырехугольнике диагональ и докажите самостоятельно. □

Вспомните тему про выпуклые четырехугольники и подумайте, когда в параллелограмм можно вписать окружность.

Определение 3.3. *Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.*

Упражнение для самостоятельного решения 25. *Пользуясь определением ромба, постройте его и впишите в него окружность.*

Когда вокруг параллелограмма можно описать окружность?

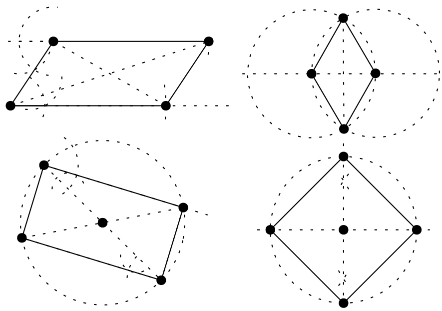
Определение 3.4. *Прямоугольник — это параллелограмм, у которого углы прямые.*

Упражнение для самостоятельного решения 26. *Пользуясь определением прямоугольника, постройте его и опишите вокруг него окружность.*

Когда в прямоугольник возможно вписать окружность?

Определение 3.5. *Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.*

Упражнение для самостоятельного решения 27. *Пользуясь определением квадрата, постройте его. Опишите вокруг него окружность и впишите в него окружность.*



Чертеж 3.6. Параллелограмм, ромб, прямоугольник и квадрат.

Упражнение для самостоятельного решения 28. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Докажите.*

3.4. Измерение площадей плоских прямолинейных фигур

Геометрия буквально «взошла» на почве, нанесенной разливами реки Нил. Греческий историк Геродот в V веке до нашей эры сообщает, что египтяне при распределении земельных площадей открыли некоторые истины геометрии.[6]

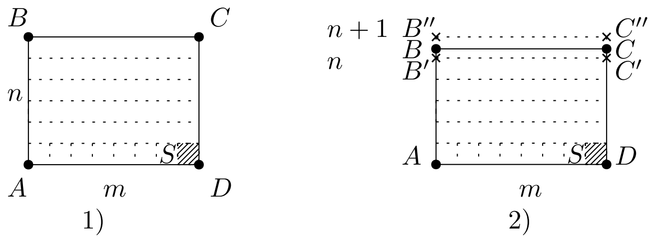
[6]Греческое слово «геометрия» означает «землемерие».

Площадь — величина поверхности. Измерить площадь — значит найти отношение её к площади, которую принимаем за единицу меры. За единицу меры площади принимается площадь квадрата, сторона которого принята за единицу длины. Следующие положения принимаются за очевидные:
1) если одна фигура является частью другой, то ее площадь меньше площади целой фигуры;
2) если фигура состоит из нескольких фигур, то ее площадь равна сумме площадей составляющих ее фигур;
3) две фигуры, состоящие из одинакового числа соответственно равных фигур, имеют равные площади.

Задача 3.4. *Вычислить площадь прямоугольника, высота и основание которого соизмеримы с единицей длины.*

Решение. Дан прямоугольник $ABCD$ (см. черт. 3.7(1)). Его высота и основание соизмеримы с единицей длины. Допустим, единица длины содержится в основании m раз, а в высоте n раз. Разделим высоту на n отрезков и через конец каждого отрезка проведем прямые, параллельные основанию. Рассмотрим отдельно один из n построенных прямоугольников. Разделим его основание на m равных отрезков, и через конец каждого отрезка проведем прямую, параллельную высоте. Рассматриваемый прямоугольник разбился на m равных квадратов. Сторона каждого из квадратов равна единице длины, тогда площадь каждого из квадратов S является единицей площади. Находим, что площадь данного прямоугольника равна произведению m на n. Как следствие, площадь произвольного квадрата будет выражаться через квадрат его стороны. □

Пусть высота прямоугольника несоизмерима с единицей длины, а основание соизмеримо и содержит m единиц длины (см. черт. 3.7(2)). Площадь квадрата с этой единицей длины будет единицей площади. Будем откладывать единицу длины вдоль высоты AB n раз. Если при $n + 1$ отложении мы «перешагнем»



Чертеж 3.7. Площадь прямоугольника.

точку B, то тогда остановимся. Точку, полученную при n-ом отложении, отметим как B', а при $(n+1) - B''$.

$$m \times n < \frac{\text{площадь } ABCD}{\text{площадь } S} < m \times (n+1).$$

Разделим единицу длины на произвольно большое число l равных частей. Будем откладывать эти части на высоте до тех пор, пока не «перешагнем» точку B. Число до «перешагивания» обозначим как x, тогда:

$$m \times \frac{x}{l} < \frac{\text{площадь } ABCD}{\text{площадь } S} < m \times \frac{x+1}{l}.$$

При неограниченном увеличении числа l, площадь $ABCD$[7] будет являться тем пределом,[8] к которому стремятся площади $AB'C'D$ и $AB''C''D$. Если величину высоты прямоугольника $ABCD$ обозначим через h, к которой стремятся отношения $\frac{x}{l}$ и $\frac{x+1}{l}$, то результат, полученный при решении задачи 3.4, можно применить и для случая несоизмеримости высоты прямоугольника с единицей длины. К аналогичному выводу мы

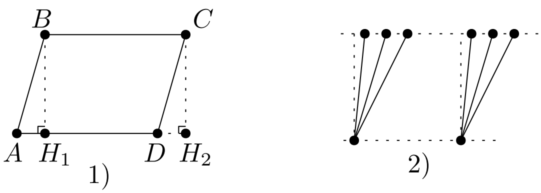
[7]Вместо «площадь $ABCD$» будем писать S_{ABCD}.

[8]Постоянная величина, к которой приближается переменная так, что разность между ними может быть сделана меньше любой произвольно заданной величины, называется пределом этой переменной величины.

придем, если основание будет несоизмеримо с единицей длины или основание и высота вместе.

Задача 3.5. *Вычислить площадь произвольного параллелограмма.*

Решение. Дан параллелограмм $ABCD$ (см. черт. 3.8(1)), опустим высоты BH_1 и CH_2 из вершин B и C на основание AD. Пря-



Чертеж 3.8. Площадь параллелограмма.

моугольные треугольники AH_1B и DH_2C — равные треугольники по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников заключаем, что и площади, занимаемые ими, также равны. $S_{\triangle AH_1B} = S_{\triangle DH_2C}$.

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AH_1B} + S_{H_1BCD};$$

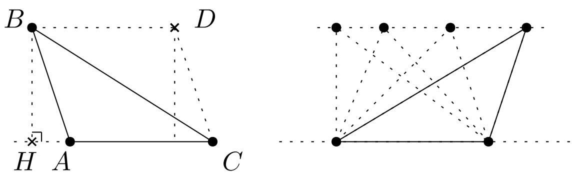
$$S_{H_1BCD} = S_{H_1BCH_2} - S_{\triangle DH_2C};$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AH_1B} + (S_{H_1BCH_2} - S_{\triangle DH_2C}) = S_{H_1BCH_2};$$

$$S_{ABCD} = BH_1 \times BC = BH_1 \times AD.$$

Итак, *площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание.* Если высота и основание одного параллелограмма равны высоте и основанию другого, то их площади равны[9] (см. черт. 3.8(2)). □

Задача 3.6. *Вычислить площадь произвольного треугольника.*



Чертеж 3.9. Площадь треугольника.

Решение. Дан треугольник ABC (см. черт. 3.9). Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне AC, через вершину C — прямую, параллельную стороне AB. Построенные прямые пересекутся в точке D. $ABCD$ — параллелограмм, $AB = DC$, $BD = AC$. $\triangle DBC = \triangle ABC$ по трем сторонам, $S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABC}$. Площади двух равных треугольников составляют площадь параллелограмма с основанием AC и высотой BH. Значит, площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \times BH}{2}.$$

Следствия:

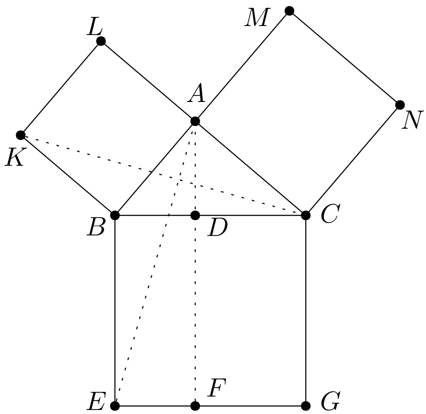
1. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, имеющего с ним общее основание и высоту.
2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.
3. Два треугольника, имеющие одинаковое основание и одинаковую высоту, равновелики.
4. Отношение площадей двух треугольников с равными высотами равно отношению оснований, на которые эти высоты опущены. Если у треугольников равны основания, то отношения их площадей равно отношению высот, опущенных на эти основания.
5. Площади подобных треугольников относятся как квадраты

[9]Фигуры, площади которых равны, называются *равновеликими.*

сходственных сторон или как квадраты сходственных высот (высот, опущенных на сходственные стороны). Докажите самостоятельно. □

Задача 3.7. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Докажите.*

Доказательство. Приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора.[10] Дан прямоугольный треугольник BAC с прямым углом A (см. черт. 3.10). На каждой стороне прямоугольного тре-



Чертеж 3.10. Теорема Пифагора.

угольника построим квадраты $BKLA$, $MACN$ и $BEGC$. Из вершины A прямого угла треугольника опустим высоту AD и продлим ее до пересечения со стороной EG квадрата $BEGC$ в точке F. $\triangle ABE = \triangle KBC$, так как $AB = KB$, $BC = BE$, $\angle KBC = d + \angle ABC = \angle ABE$. Делаем вывод, что $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle KBC}$. $S_{\triangle KBC} = \frac{1}{2} S_{LKBA}$, так как у них общее основание KB и высота, опущенная из вершины C на прямую KB, равна высоте AB.

[10]Пифагорова теорема также носит название *magister matheseos*, потому как ранее она предлагалась в университетах на магистерских экзаменах.

Аналогично $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{BEFD}$, так как у них общее основание BE и равны высоты, опущенные на него или его продолжение. $\frac{1}{2} S_{LKBA} = \frac{1}{2} S_{BEFD}$ или $S_{LKBA} = S_{BEFD}$. Аналогично доказывается, что $S_{MACN} = S_{DFGC}$. $S_{BEGC} = S_{BEFD} + S_{DFGC}$.

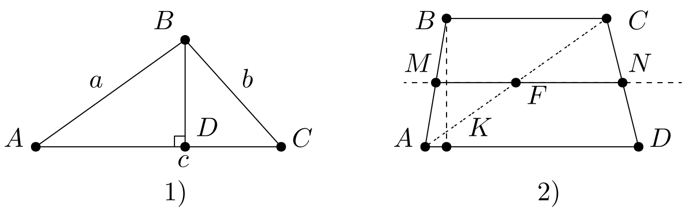
$$S_{BEGC} = S_{KBAL} + S_{MACN} \text{ или } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

□

Если два катета прямоугольного треугольника равны 3 и 4, то гипотенуза будет равна 5 ($5^2 = 3^2 + 4^2$).[11] Теорему, обратную теореме Пифагора, докажите самостоятельно.

Задача 3.8. *Определите площадь треугольника через его стороны.*

Решение. Перед решением задачи повторим раздел 2.5 на стр. 121. Дан треугольник ABC. Угол A — острый угол. Из вершины



Чертеж 3.11. Треугольник и трапеция.

B опустим высоту BD на AC (см. черт. 3.11(1)). AB обозначим как a, BC — как b, AC — как c. $BD^2 = a^2 - AD^2$.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$ или $AD = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$.

$BD^2 = a^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}$.

[11] Это формула «египетского треугольника».

$BD^2 = \dfrac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}$.

$BD^2 = \dfrac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4c^2}$.

Упростим выражения в каждой скобке:

$(2ac + a^2 + c^2 - b^2) = ((a+c)^2 - b^2) = (a+c+b)(a+c-b)$.

$(2ac - a^2 - c^2 + b^2) = (b^2 - (a-c)^2) = (b+a-c)(b-a+c)$.

$BD^2 = \dfrac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{4c^2}$.

$BD = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}}{2c}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{BD \cdot c}{2} = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}}{4}$.

Представим полученное выражение в другом виде. Обозначим полупериметр треугольника через p, тогда $a+b+c = 2p$.

$a - b + c = 2p - 2b$.

$a + b - c = 2p - 2c$.

$b + c - a = 2p - 2a$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a)}}{4}$.

$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$

Полученная формула носит имя Герона Александрийского.

□

Задача 3.9. *Вычислить площадь произвольной трапеции.*

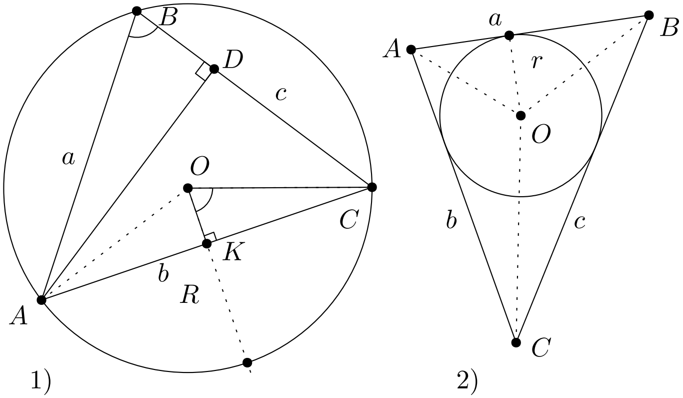
Решение. Дана трапеция $ABCD$ (см. черт. 3.11(2)). Проведем в ней среднюю линию MN. Опустим высоту BK.

Проведем диагональ AC, которая пересечет MN в точке F. $\triangle ACD \sim \triangle FCN$, $AD = 2FN$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AD = BK \cdot FN$. $\triangle ABC \sim \triangle AMF$, $BC = 2MF$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot BC = BK \cdot MF$.

$$S_{ABCD} = BK \cdot MF + BK \cdot FN = BK \cdot MN.$$

Площадь трапеции равна произведению высоты на среднюю линию. Помним, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований. □

Задача 3.10. *Выразите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, через его стороны и его площадь.*



Чертеж 3.12. Треугольник и радиус окружности.

Решение. В данном треугольнике ABC сторону AB примем как a, AC — как b, BC — как c (см. черт. 3.12(1)). Радиус описанной окружности — R. Из центра окружности опустим перпендикуляр OK на AC. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle KOC$. Из вершины угла A опустим перпендикуляр AD на сторону BC. Прямоугольные треугольники ADB и CKO — подобные треугольники ($\angle KOC = \angle ABC$). Из подобия треугольников имеем: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{KC}{OC}$ или $\dfrac{AD}{a} = \dfrac{b}{2R}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot c$ или $AD = 2 \cdot S_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{c}$.

$$\frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{a \cdot c} = \frac{b}{2R};$$

$$R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

Подставим выражение площади треугольника из формулы Герона:[12]

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}.$$

$\square$

Задача 3.11. *Выразите радиус окружности, вписанной в треугольник, через его стороны и его площадь.*

Решение. Дан треугольник ABC (см. черт. 3.12(2)). $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$. В треугольник вписана окружность с центром в точке O и радиусом r.

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot a$. $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$. $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot c$.

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$.

$S_{\triangle} = \dfrac{(a+b+c) \cdot r}{2} = \dfrac{(a+b+c)}{2} \cdot r = pr.$

$$r = \frac{S_{\triangle}}{p}.$$

Подставим выражение площади треугольника из формулы Герона:

$$r = \frac{\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}{p}.$$

$\square$

Произведение радиусов описанной и вписанной окружностей в треугольник выразится как:

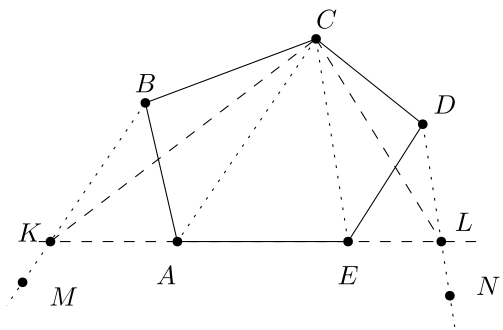
$$Rr = \frac{abc}{2 \cdot (a+b+c)}.$$

[12] Напомним, что p — полупериметр треугольника.

3.5. Правильный многоугольник

Фигура, ограниченная более чем четырьмя сторонами, называется *многоугольником*. *Диагональю* многоугольника называется отрезок, соединяющий вершины двух углов, не прилежащих к одной стороне.

Задача 3.12. *Превратить многоугольник $ABCDE$ в равновеликий треугольник (см. черт. 3.13).*



Чертеж 3.13. Многоугольник и равновеликий ему треугольник.

Решение. Проведем диагональ CE. Через вершину D проведем прямую DN, параллельную CE. Найдем точку L в месте пересечения прямых DN и AE. Треугольники CDE и CLE имеют общее основание CE и равные высоты, так как расстояние между параллельными прямыми есть величина постоянная. $S_{\triangle CLE} = S_{\triangle CDE}$. Проведем диагональ AC, через вершину B проведем прямую BM, параллельную AC. Прямая BM пересечет прямую AE в точке K. Аналогично $S_{\triangle CBA} = S_{\triangle KCA}$.

$S_{\triangle KCL} = S_{\triangle KCA} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CLE}$;

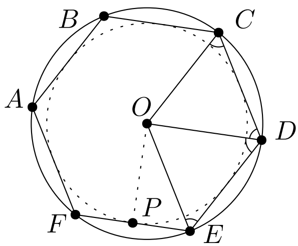
$S_{ABCDE} = S_{\triangle CBA} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CDE}$;

$S_{ABCDE} = S_{\triangle KCL}$.

Повторяя данное построение для любого многоугольника, мы можем превратить его в равновеликий треугольник. Таким образом, мы можем найти площадь многоугольника путем превращения его в равновеликий треугольник. Можно также разбить многоугольник на треугольники, затем найти площадь каждого треугольника и сложить полученные величины. □

Правильным называется многоугольник, у которого все стороны и углы равны.

Теорема 3.5. *Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.*



Чертеж 3.14. Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство. Дан правильный многоугольник $ABCDEF$ (см. черт. 3.14). Проведем биссектрису угла C и биссектрису угла D. Они пересекутся в некоторой точке O. $\triangle COD$ — равнобедренный треугольник, так как $\angle OCD = \angle CDO$, значит, $OC = OD$. Соединим отрезком вершину E и точку O. $\triangle EOD = \triangle COD$, так как $\angle ODE = \angle ODC$, $DE = CD$ как стороны правильного многоугольника, а OD — общая сторона. Делаем вывод, что $OC = OD = OE$. Аналогичные действия можем повторить для всех остальных вершин, после чего придем к следующему выводу: все вершины углов правильного многоугольника равноудалены от одного центра, который является центром описанной окружности.

Стороны CD, DE, EF и т. д., будучи равными хордами одной окружности, должны стоять на равном удалении от центра описанной окружности. Перпендикуляры, опущенные из общего центра на середину каждой стороны, также будут равны между собой. Если перпендикуляр OP к стороне EF правильного многоугольника $ABCDEF$ мы примем за радиус окружности, то она коснется всех сторон правильного многоугольника в их серединах, значит, будет вписанной окружностью. $\square$

Радиус окружности, вписанной в многоугольник, называется *апофемой* многоугольника. Общий центр вписанной и описанной окружностей называется *центром* правильного многоугольника. Чтобы отыскать центр правильного многоугольника, надо или восстановить перпендикуляры из середин двух непараллельных сторон, или провести биссектрисы двух углов.

Чтобы вписать в окружность правильный n-угольник, необходимо разделить линию окружности на n равных частей. Углы этого n-угольника будут равны между собой, так как окружность будет разделена на n равных дуг и каждый угол будет измеряться половиной дуги, содержащей таких $n - 2$ частей. Для правильного шестиугольника угол будет равен: $\frac{1}{2} \cdot \frac{(6-2)}{6} \cdot 4d = \frac{4}{3}d$. Для правильного пятиугольника: $\frac{1}{2} \cdot \frac{(5-2)}{5} \cdot 4d = \frac{6}{5}d$. Для правильного четырехугольника: $\frac{1}{2} \cdot \frac{(4-2)}{4} \cdot 4d = d$. Правильный четырехугольник с углом d — это квадрат. Угол правильного n-угольника равен: $\frac{n-2}{n} \cdot 2d$.

Если в окружность вписан правильный n-угольник, то в нее можно вписать и правильный $2n$-угольник. Для этого необходимо из центра правильного многоугольника провести радиусы, перпендикулярные его сторонам, тогда в новых точках окружность разделится на $2n$ равных частей. Соединив эти точки прямыми, получим правильный $2n$-угольник (см. черт. 3.15(1)).

Упражнение для самостоятельного решения 29. *Выразите площадь правильного многоугольника через радиус вписанной в него окружности и его периметр.*[13]

Рассмотрим треугольник OAB на чертеже 3.15(1)) в правильном вписанном $2n$-угольнике. Сторона AC правильного вписанного n-угольника перпендикулярна радиусу OB, и делится им на 2 равные части в точке D. $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OB \cdot OD$. В прямоугольном треугольнике ODA: $OD^2 = OA^2 - AD^2$ или $OD = \sqrt{OA^2 - \dfrac{AC^2}{4}}$. Учитывая, что $OA = OB$:

$$AB^2 = 2 \cdot OA^2 - 2 \cdot OA \cdot \sqrt{OA^2 - \frac{AC^2}{4}}.$$

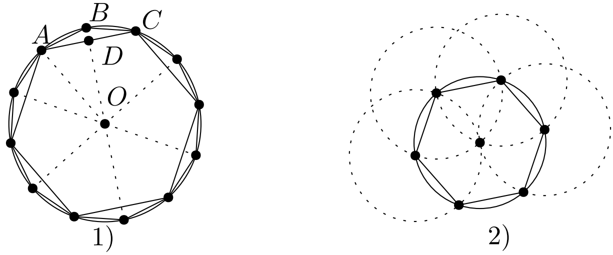
Обозначим через n число сторон правильного многоугольника, вписанного в окружность, а через a_n его сторону. Тогда величину стороны a_{2n} правильного многоугольника с удвоенным числом сторон, вписанного в окружность радиусом R, найдем по формуле:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}. \tag{3.1}$$

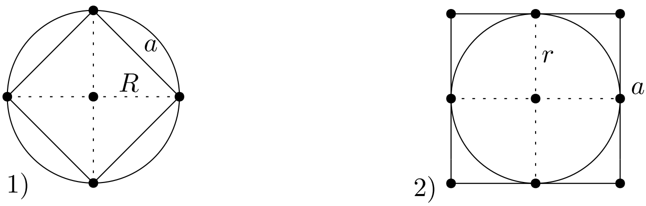
По полученной формуле, зная радиус описанной окружности и величину стороны правильного n-угольника, можно определить величину стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в ту же окружность. Мы можем применить формулу последовательно и найти величину стороны $4n$, $8n$, $16n \cdots$ -стороннего правильного многоугольника.

Если мы соединим центр правильного шестиугольника с каждой его вершиной, то получим шесть равных равнобедренных треугольников. Угол при вершине будет: $2d - 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}d) = 2d - \frac{4}{3}d = \frac{2}{3}d$. Угол при вершине равен углу при основании,

[13] Периметр многоугольника — это отрезок, равный сумме всех его сторон.



Чертеж 3.15. 1) Построение правильного 12-угольника. 2) Построение правильного шестиугольника.

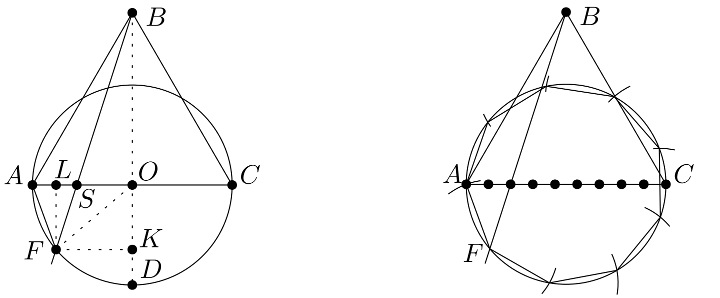


Чертеж 3.16. 1) Квадрат, вписанный в окружность. 2) Окружность, вписанная в квадрат.

значит, все построенные треугольники также будут и равносторонними. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности (см. черт. 3.15(2)). Для построения правильного шестиугольника с заданной стороной нам необходимо: 1) построить окружность радиусом, равным заданной стороне; 2) с раствором циркуля, равным радиусу окружности, последовательно отметить шесть засечек на линии окружности (сначала острый конец ставим в любом месте на линии окружности, а потом передвигаем его на каждое новое пересечение); 3) соединить построенные точки.

Чтобы вписать в окружность квадрат, необходимо провести два перпендикулярных диаметра и соединить построенные точки. Если R — радиус окружности, описанной вокруг квадрата, то сторона квадрата a равна $R\sqrt{2}$ ($a^2 = 2R^2$, $a = R\sqrt{2}$). Если r — радиус окружности, вписанной в квадрат, то сторона квадрата a равна $2r$ (см. черт. 3.16).

Задача 3.13. *На диаметре AC окружности с центром в точке O построен равносторонний треугольник ABC. Сторону AC разделили на n равных частей. Через конечную точку S второго деления, считая от A, провели секущую BS. Точка F — точка, в которой секущая BS пересекает окружность, и которая лежит снаружи треугольника ABC. Определите величину хорды AF, полагая радиус окружности равным 1, а расстояние $SO = 1 - 2 \cdot \frac{2}{n} = d$ (см. черт. 3.17, слева) (ME 269.24).*



Чертеж 3.17. Способ вписывания правильного n-угольника.

Решение. Через центр окружности O проведем перпендикуляр к AC, который пересечет окружность в точке D. Точка B будет лежать на перпендикулярной прямой OD, проходящей через середину AC, так как она равноудалена от концов A и C. Из точки F опустим перпендикуляры FK и FL на OD и AC соответственно, значит, $FLOK$ — прямоугольник. По теореме Пифагора $AF^2 = AL^2 + FL^2$. Так как $AL = AO - LO = AO - FK$, а $FL = KO$, то $AF^2 = AO^2 - 2AO \cdot FK + FK^2 + KO^2$.

FO — радиус окружности, и из условия задачи $FO^2 = 1$. По теореме Пифагора $FK^2 + OK^2 = FO^2 = 1$. Подставим значение полученного выражения в найденное равенство: $AF^2 = AO^2 - 2AO \cdot FK + FK^2 + OK^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot FK + 1 = 2 - 2FK$.

Прямоугольные треугольники BKF и BOS — подобные треугольники по острому углу KBF. Из подобия треугольников: $\frac{FK}{SO} = \frac{BK}{BO}$ или $\frac{FK}{d} = \frac{BO+OK}{BO}$. Так как сторона равностороннего треугольника ABC равна двум радиусам, то по теореме Пифагора $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Получаем, что $\frac{FK}{d} = \frac{\sqrt{3}+OK}{\sqrt{3}}$. Выражаем из последней пропорции величину OK: $OK = \sqrt{3}\left(\frac{FK}{d} - 1\right)$, а так как $OK^2 + FK^2 = 1$, то $\left(\sqrt{3}\left(\frac{FK}{d} - 1\right)\right)^2 + FK^2 = 1$.

Преобразуем последнее выражение к такому виду: $(3 + d^2)FK^2 - 6dFK + 2d^2 = 0$. Находим корни квадратного уравнения: $FK_{1,2} = \frac{d(3 \pm \sqrt{3-2d^2})}{3+d^2}$. Сумма корней FK_1 и FK_2, равная $\frac{6d}{3+d^2}$ или $2d \cdot \frac{3}{3+d^2}$, будет меньше $2d$; а так как $FK > SO$ или $FK > d$, то за величину FK принимается бóльший корень. $FK = \frac{d(3+\sqrt{3-2d^2})}{3+d^2}$.

Ранее мы нашли, что $AF^2 = 2 - 2FK$, если мы подставим в это выражение полученное значение FK, то $AF^2 = 2 - 2 \cdot \frac{d(3+\sqrt{3-2d^2})}{3+d^2}$. Так как $d = 1 - \frac{4}{n}$, то $AF^2 = 2 - \frac{n-4}{2} \cdot \frac{3n+\sqrt{n^2+16n-32}}{(n-1)^2+3}$.

При $n = 3$ $AF = \sqrt{3}$ — величина стороны правильного вписанного треугольника; при $n = 4$ $AF = \sqrt{2}$ — величина стороны вписанного квадрата; при $n = 6$ $AF = 1$ — величина стороны вписанного шестиугольника. При $n = 5$ $AF = 1.1785...$, что очень близко подходит к величине стороны вписанного правильного пятиугольника. Построением, указанным в задаче, можно пользоваться для вписывания правильных многоугольников в окружность. Одни многоугольники будут вписаны точно, другие — не совсем точно. На чертеже (см. черт. 3.17, справа) показан неточно построенный правильный девятиугольник. □

Гаусс показал, что с помощью циркуля и линейки в окружность можно вписать правильный многоугольник, если число сторон его равно $2^n + 1$ и число это простое.

Все правильные одноименные многоугольники подобны между собой, так как у них все углы равны, а так как все стороны одного многоугольника равны между собой, то у них и стороны пропорциональны.

Задача 3.14. *Периметры подобных многоугольников относятся между собой как сходственные стороны. Докажите.*

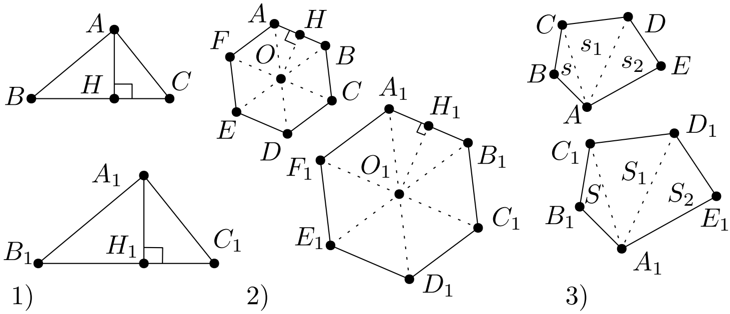
Решение. Если подобны многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$. Из свойств пропорции знаем, что: $\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. □

Задача 3.15. *Отношение периметров правильных одноименных многоугольников равно отношению их апофем. Площади подобных треугольников относятся между собой как квадраты сходственных сторон. Докажите.*

Решение. Сперва докажем, что в подобных треугольниках высоты пропорциональны сторонам, к которым они проведены (основаниям). Рассмотрим подобные треугольники BAC и $B_1A_1C_1$ (см. черт. 3.18(1)). Опустим высоты AH и A_1H_1 на сходственные стороны BC и B_1C_1. Из подобия $\triangle BAC$ и $\triangle B_1A_1C_1$: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Прямоугольный треугольник AHB подобен прямоугольному треугольнику $A_1H_1B_1$: $\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

$$\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Возьмем два правильных одноименных многоугольника $ABCDE...$ и $A_1B_1C_1D_1E_1...$ (см. черт. 3.18(2)). Разделим их на треугольники, соединив отрезками каждую вершину многоугольника с его центром, и опустим высоты OH и O_1H_1 из центра каждого многоугольника на его сторону. Из подобия



Чертеж 3.18. Площади подобных многоугольников относятся между собой как квадраты сходственных сторон.

треугольников, которые составляют правильные одноименные многоугольники, мы находим, что отношение высот выражается как:

$$\frac{OH}{O_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \cdots ;$$

$$\frac{OH}{O_1H_1} = \frac{AB + BC + \cdots}{A_1B_1 + B_1C_1 + \cdots} = \frac{\text{Периметр } ABCDE...}{\text{Периметр } A_1B_1C_1D_1E_1...}.$$

Таким образом, отношение периметров правильных одноименных многоугольников равно отношению их апофем.

Продолжим решение задачи. Выразим отношение площадей подобных треугольников:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AH \cdot BC}{A_1H_1 \cdot B_1C_1}.$$

Так как отношение высот равно отношению сторон, то можем записать так:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{BC}{B_1C_1} \cdot \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$

□

Задача 3.16. *Площади подобных многоугольников относятся между собой как квадраты сходственных сторон. Докажите.*

Решение. Разделим диагоналями подобные многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (см. черт. 3.18(3)). Из подобия образованных треугольников: $\frac{S}{s} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}$, $\frac{S_1}{s_1} = \frac{C_1D_1^2}{CD^2}$, $\frac{S_2}{s_2} = \frac{D_1E_1^2}{DE^2}$. Так как многоугольники подобны, то квадраты отношений сходственных сторон также равны.

$$\frac{S}{s} = \frac{S_1}{s_1} = \frac{S_2}{s_2} = \frac{S + S_1 + S_2}{s + s_1 + s_2};$$

$$\frac{S + S_1 + S_2}{s + s_1 + s_2} = \frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}.$$

В *правильных подобных многоугольниках стороны пропорциональны апофемам, поэтому площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты их апофем.* □

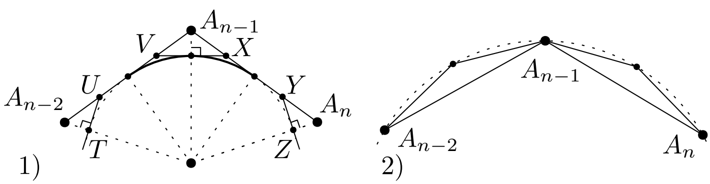
3.6. Длина окружности. Площадь круга

Ломаной называется линия, состоящая из последовательно соединенных отрезков, в которой конец одного отрезка является началом другого. Длину ломаной мы можем легко определить, если измерим длину каждого отрезка в нее входящего. Вопрос определения длины дуги немного сложнее. Длину дуги невозможно определить путем *непосредственного наложения* на нее отрезка прямой. Если для определения величины дуг мы будем пользоваться другими дугами, то для каждой дуги нужно применять отдельную единицу, которая будет построена на окружности того же радиуса (совместить возможно только дуги равных окружностей). В связи с этим, длины дуг принято выражать в единицах прямолинейных отрезков и определять посредством вычислений.

Теорема 3.6. *Длина окружности — предел периметров вписанных в нее и описанных вокруг нее правильных многоугольников с бесконечным числом сторон.*

Доказательство. Мы принимаем, что в окружность можно вписать такой правильный многоугольник, сторона которого будет меньше любого заданного отрезка a. Если мы отложим на линии окружности хорду величиной a, то мы можем вписать в нее правильный многоугольник со стороной b. Если $b > a$, то как мы видели, можно легко удвоить число сторон вписанного многоугольника. Примем величину стороны многоугольника с удвоенным числом сторон снова за b. Мы можем продолжать удвоение сторон до тех пор, пока хорда b не станет меньше хорды a.

Если будем удваивать число сторон правильного n-



Чертеж 3.19. Окружность и многоугольник.

угольника, описывающего окружность, то что будет с его периметром? Посмотрите на чертеж 3.19(1). На нем показаны две стороны $A_{n-2}A_{n-1}$ и $A_{n-1}A_n$ одного из углов правильного n-угольника, описывающего окружность. При преобразовании правильного n-угольника в правильный $2n$-угольник, дуги, заключенные между точками прикосновения сторон правильного n-угольника и линии окружности, делятся пополам. Через точки делений дуг и точки касаний правильного n-угольника проводятся касательные к окружности, и так как окружность поделена этими точками на $2n$ равных частей, то образовавший-ся от пересечения касательных $2n$-угольник будет правильным.

Длина ломаной $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ будет больше длины ломаной $TUVXYZ$, а центральный угол окружности, соответствующий дуге TZ, не изменился. Делаем вывод, что периметр правильного многоугольника, описывающего окружность, при увеличении числа сторон, уменьшается и остается больше длины окружности.[14]

Если будем удваивать число сторон вписанного правильного n-угольника, то его периметр будет увеличиваться и оставаться меньше длины окружности (см. черт. 3.19(2)). К этому выводу вы придете, если исследуете формулу 3.1 на странице 145.

Обозначим периметр описанного многоугольника через P, а его апофему через R. Периметр вписанного многоугольника обозначим через p, а его апофему через r. Отношение периметров одноименных правильных многоугольников можем выразить как:

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r} \text{ или } \frac{P-p}{p} = \frac{R-r}{r}.$$

При бесконечном увеличении числа сторон вписанного и описанного многоугольников разность $R - r$ будет меньше наперед заданной, сколь угодно малой величины. Величина r — величина конечная. Величина $\frac{R-r}{r}$ — величина бесконечно малая, значит, $\frac{P-p}{p}$ есть величина бесконечно малая. Разность $P-p$ может быть сделана меньше любой заданной величины. Разность между длиной окружности, заключенной между многоугольниками, и любым из периметров многоугольника и подавно будет меньше любой заданной величины. Из этого заключаем, что длина окружности является пределом для периметров описанного и вписанного многоугольников. $\square$

Учитывая тот факт, что отношение периметров правильных одноименных многоугольников равно отношению их апофем, а длина вписанной окружности является пределом для периметра правильного многоугольника с бесконечным числом сторон,

[14] Доказательство последнего утверждения вы встретите в курсе математического анализа.

тогда отношение длин окружностей будет равно отношению их радиусов:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{ или } \frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2}, \text{ или } \frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2}.$$

Отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное. Это отношение обозначается буквой π. Древнегреческий ученый Архимед вычислил, что π заключается между $3\frac{10}{70}$ и $3\frac{10}{71}$, а после приведения дробей к одному знаменателю между $3\frac{71}{497}$ и $3\frac{70}{497}$. Число $\frac{22}{7}$ является приближением π с точностью до $\frac{1}{497}$ и больше настоящей величины.[15] Таким образом, *длина окружности равна произведению числа π на диаметр*:

$$\pi D \text{ или } 2\pi R.$$

Если величина центрального угла равна α, то длина соответствующей ему дуги окружности l_α радиусом R равна:

$$2\pi R \cdot \frac{\alpha}{4d} \text{ или } \frac{\alpha}{2d} \cdot \pi R.$$

Определение 3.6. *Круг — это часть плоскости, которая лежит внутри окружности.*

Аналогично доказательству теоремы 3.6 строится доказательство того, что площадь круга — это предел площади правильного многоугольника с бесконечным числом сторон. Если за S примем площадь правильного n-угольника, описывающего окружность радиусом R, за s — площадь правильного n-угольника, вписанного в эту окружность с апофемой r, то:

$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2} \text{ или } \frac{S-s}{s} = \frac{(R-r)(R+r)}{r^2}.$$

При неограниченном увеличении числа сторон обоих многоугольников разность $R-r$ будет стремиться к нулю, а $R+r$ и r^2

[15] Стоит отметить, что данной точности более чем достаточно для большинства школьных расчетов.

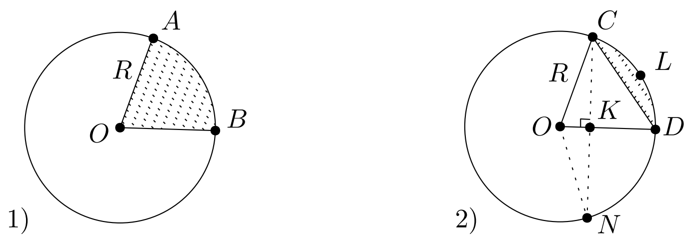
— величины конечные. Вся дробь $\frac{(R-r)(R+r)}{r^2}$ будет стремиться к нулю. Разность $S-s$ также будет меньше сколь угодно малой величины. Значит, площадь круга — это предел для площадей правильных многоугольников S и s. Мы знаем, что площадь правильного многоугольника равна произведению его периметра на половину апофемы. Подставив вместо периметра правильного многоугольника с бесконечным числом сторон его предел, мы получим, что площадь круга равна:

$$(2\pi R)\cdot(\frac{1}{2}\cdot R)=\pi R^2.$$

Сектор — это часть круга, которая ограничена двумя радиусами и дугой между ними (см. черт. 3.20(1)). Если величина угла равна α, то площадь сектора, образованного этим углом в окружности радиусом R, равна:

$$\frac{\alpha}{4d}\pi R^2.$$

Площадь сектора во столько раз меньше площади круга, во



Чертеж 3.20. Сектор и сегмент круга.

сколько раз длина его дуги меньше длины окружности.[16] Если

[16]Для доказательства этого утверждения необходимо воспользоваться тем фактом, что центральные углы пропорциональны их дугам (теорема 2.12 на стр. 99).

R — радиус окружности, s — площадь сектора, l — длина дуги, то:

$$\frac{s}{\pi R^2} = \frac{l}{2\pi R} \text{ или } s = \frac{1}{2}lR.$$

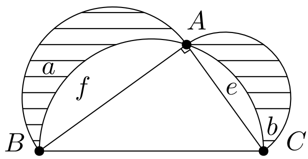
Площадь сектора равна половине произведения его дуги на радиус.

Сегмент круга — это часть круга, которая ограничена дугой окружности и стягивающей ее хордой. Площадь сегмента CLD (см. черт. 3.20, справа) определим как разность площади сектора COD и площади треугольника DOC. Примем длину дуги CD за l, радиус окружности за R, тогда:

$$S_{CLD} = \frac{lR}{2} - \frac{R \cdot CK}{2} = \frac{1}{2}R(l - CK).$$

CK — половина хорды, стягивающей удвоенную дугу сегмента.

Упражнение для самостоятельного решения 30. *Площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах. Докажите.*



Чертеж 3.21. Гиппократовы луночки.

Отняв площади сегментов e и f от площади полукруга, построенного на гипотенузе (см. черт. 3.21), мы получим площадь прямоугольного треугольника BAC; отняв же сегменты e и f от полукругов, построенных на катетах, получим площади фигур a и b. $S_{\triangle BAC} = S_a + S_b$. Фигуры a и b называются *гиппократовыми луночками*, по имени древнегреческого геометра Гиппократа Хиосского.

Контрольное упражнение 4.

1. (Формула Эйлера) Во всяком треугольнике расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей есть средняя пропорциональная между радиусом описанной окружности и разностью между этим радиусом и диаметром вписанной окружности. Докажите (ME 270.11). *[17]

2. Выразите площадь треугольника через радиус внешне вписанной окружности, его полупериметр и величину стороны, которая является касательной к окружности. *[18]

3. Алгебраически выразите площадь треугольника через радиус вписанной окружности и радиусы трех внешне вписанных окружностей.

4. Постройте треугольник по основанию b, противолежащему углу α и радиусу вписанной окружности r (ME 277.7). *[19]

5. Дан треугольник ABC. Дано основание a, постройте на этом основании треугольник, равновеликий треугольнику ABC так, что угол при данном основании равен углу B (ME 300.3).

[17] Опишите окружность, проведите биссектрисы двух углов до пересечения с окружностью. Соедините точку пересечения одной биссектрисы и окружности с вершиной угла, из которого проведена другая биссектриса. Рассмотрев дуги и их половинки, отсекаемые биссектрисами, найдите два равных угла, прилежащих к части одной биссектрисы. Отметьте равнобедренный треугольник с вершиной на окружности. Проведите через эту вершину и центр описанной окружности прямую. Найдите то, что она перпендикулярна стороне треугольника. Соедините концы построенного перпендикуляра с вершиной данного треугольника. Рассмотрите подобные прямоугольные треугольники. Выразите квадрат стороны прямоугольного треугольника (она же сторона и построенного равнобедренного треугольника) через произведение отрезков гипотенузы. Опустите перпендикуляр из места пересечения медиан на построенный диаметр. Рассмотрите прямоугольный треугольник, концы гипотенузы которого лежат на центрах вписанной и описанной окружностей.

[18] Опустите из центра окружности перпендикуляры на дополнения сторон. Соедините центр окружности с двумя вершинами треугольника. Выразите площадь треугольника как разность суммы площадей двух бо́льших треугольников и суммы площадей четырех меньших треугольников. Помните, какой величине равен полупериметр треугольника?

[19] Считайте задачу решенной. Впишите окружность и постройте внешне вписанную окружность к основанию.

6. Данный треугольник разделите на n равновеликих частей прямыми, проходящими через одну из вершин (ME 300.38).
7. Внутри треугольника ABC найдите такую точку, чтобы полупрямые, проведенные из нее к вершинам треугольника, делили его на три равновеликие части (ME 300.41).
8. Треугольник ABC разделите в отношении $m : n$ прямой, проходящей через вершину A (ME 300.47).
9. Треугольник ABC разделите в отношении $m : n$ прямой, проходящей через данную точку M на стороне AB (ME 300.48).[20]
10. Постройте треугольник по трем высотам (ME 300.96).[21]
11. Постройте треугольник по стороне a, противолежащему углу A и площади S (ME 300.98).
12. В треугольнике ABC проведите отрезок MN между сторонами AB и AC так, чтобы обе части, на которые разделится треугольник, были равновелики и имели одинаковый периметр (ME 300.103).
13. Постройте правильный пятиугольник. Сперва постройте правильный десятиугольник, а затем соедините его вершины через одну.[22]
14. Если диаметр данной окружности разделить на несколько равных частей и на каждой части описать по окружности, то сумма построенных окружностей равна данной окружности. Докажите (ME 342.4).

[20]На отрезке MB постройте треугольник MBD, равновеликий треугольнику ABC так, чтобы угол B остался тем же.

[21]Считайте задачу решенной. Опустите высоты на каждое основание, приравняйте три площади. Разделите члены равенств на произведение двух высот. Из полученных пропорций найдите стороны подобного треугольника. Постройте подобный треугольник и опустите в нем высоты. Найдите основания искомого треугольника как четвертую пропорциональную.

[22]Разбейте десятиугольник на равнобедренные треугольники. Из угла, прилежащего к стороне треугольника, проведите биссектрису. Вспомните в каком соотношении биссектриса треугольника делит его сторону. Найдите отрезок, равный отрезку биссектрисы.

Глава 4.

Дополнительная

4.1. Теорема Менелая

Теорема 4.1. *Дан треугольник ABC (см. черт. 4.1).*[1] *Прямая DE пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC в точках M, N и K соответственно. Докажите, что* $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$.

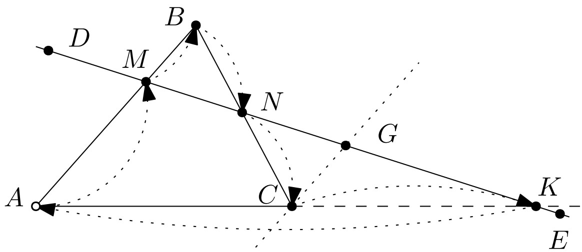
Доказательство. Через вершину C проведем прямую, параллельную стороне AB, эта прямая пересечет прямую DE в точке G. Треугольник BNM подобен треугольнику CNG ($\angle BNM = \angle CNG$, $\angle NGC = \angle NMB$). Из подобия треугольников:

$$\frac{BM}{CG} = \frac{BN}{NC} = \frac{NM}{NG}.$$

Треугольник AMK подобен треугольнику CGK[2]:

$$\frac{AM}{CG} = \frac{MK}{GK} = \frac{AK}{CK}.$$

[1] Дуги со стрелочками проставлены для удобства составления формулы.
[2] Равные углы найдите самостоятельно.



Чертеж 4.1. К теореме Менелая.

Из полученных пропорций выразим величину стороны CG:

$$CG = \frac{BM \cdot NC}{BN} \text{ и } CG = \frac{AM \cdot CK}{AK}.$$

$$\frac{CG}{CG} = \frac{AM \cdot CK}{AK} \cdot \frac{BN}{BM \cdot NC};$$

$$\frac{AM \cdot CK}{AK} \cdot \frac{BN}{BM \cdot NC} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{AK} = 1.$$

□

Обратно. Если на стороне AB треугольника ABC взята точка M, на стороне BC взята точка N, на продолжении стороны AC взята точка K, то точки M, N и K только тогда лежат на одной прямой, когда выполняется равенство $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1.$

Доказательство от противного. □

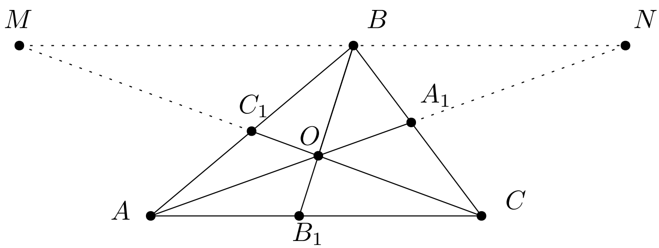
Упражнение для самостоятельного решения 31. *На стороне AB треугольника ABC расположена точка K так, что* $\frac{AK}{KB} = \frac{3}{5}$. *На прямой AC взята точка E так, что $AE = 2 \cdot CE$.*

Прямые BE и CK пересекаются в точке N. Площадь треугольника BNC равна 20. Найдите площадь треугольника ABC (из тренировочных вариантов заданий к ЕГЭ и ОГЭ по математике).

Решение. Рассмотрите два варианта: точка E расположена на стороне AC и точка E расположена на продолжении стороны AC. Вспомните формулу площади треугольника. Отметьте, что в треугольниках с равными высотами площади относятся как основания. Воспользуйтесь теоремой Менелая для нахождения сторон треугольников. Решите самостоятельно. □

4.2. Теорема Чевы

Теорема 4.2. *Дан треугольник ABC (см. черт. 4.2). На стороне AB отмечена точка C_1, на стороне BC отмечена точка A_1, а на стороне AC — точка B_1. Если отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то выполняется равенство:* $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1.$



Чертеж 4.2. К теореме Чевы.

Доказательство. Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне AC. Продлим отрезки CC_1 и AA_1 до пересечения с построенной параллельной прямой в точках M и N. Рассмотрим подобные треугольники.[3]

$\triangle AC_1C \sim \triangle BC_1M$:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BM}.$$

$\triangle AA_1C \sim \triangle NA_1B$:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{AC}.$$

$\triangle CB_1O \sim \triangle MBO$:

$$\frac{B_1C}{OB_1} = \frac{BM}{OB}.$$

$\triangle AB_1O \sim NBO$:

$$\frac{OB_1}{AB_1} = \frac{OB}{BN}.$$

Перемножаем левые и правые части полученных равенств:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{OB_1} \cdot \frac{OB_1}{AB_1} = \frac{AC}{BM} \cdot \frac{BN}{AC} \cdot \frac{BM}{OB} \cdot \frac{OB}{BN}.$$

Сокращаем:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

□

Обратно. Если в треугольнике ABC построены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, соединяющие вершину угла с противоположной стороной так, что выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, *то отрезки эти пересекаются в одной точке.* □

[3] Равные углы найдите самостоятельно.

Нам известно, что:
1) медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении $2:1$ от каждой вершины;
2) серединные перпендикуляры, восстановленные к каждой стороне треугольника, пересекаются в одной точке, и эта точка является центром описанной окружности;
3) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром вписанной окружности;
4) высоты, опущенные из каждой вершины угла треугольника на противоположную сторону или ее продолжение, пересекаются в одной точке, и эта точка называется ортоцентром треугольника.

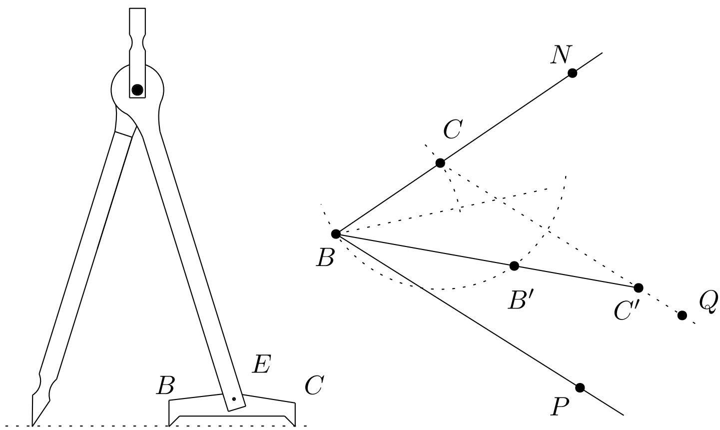
Все эти утверждения возможно доказать с помощью теоремы Чевы.

4.3. Трисекция угла

Мы знаем, что всякий угол можно разделить на два равных угла с помощью циркуля и линейки. Прямой угол можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки. Деление угла на три равные части называется *трисекцией* угла. Не всякий угол возможно разделить на три части с помощью циркуля и линейки. Чтобы разбить всякий угол на три равные части применяются специальные приборы. Простейший прибор для трисекции угла называется «вилкой» Гермеса.[4] Он имеет следующее устройство: вместо карандаша в циркуль вставляется вилка BEC, которая свободно вращается вокруг оси E (см. черт. 4.3). Чтобы разделить данный угол PBN на три равные части, мы откладываем на луче BN отрезок BC, который равен расстоянию между остриями вилки BC; через точку C проводим прямую CQ, параллельную BP; точку C принимаем за центр окружности, а отрезок BC за ее радиус и этим радиусом описываем окружность внутри данного угла; ножку циркуля без

[4] Текст по книге «Геометрия на задачах», С.И. Шохор-Троцкий.

вилки ставим на точку B, острие вилки B ставим на некую точку окружности B', а острие C на некоторую точку C', расположенную на прямой CQ. Луч BB' отсекает от угла NBP третью часть и называется его *трисектрисой*. Докажите, что $\angle C'BP = \frac{1}{3}\angle NCQ$. Представленным прибором можно делить углы, которые меньше чем $\frac{4}{3}d$.



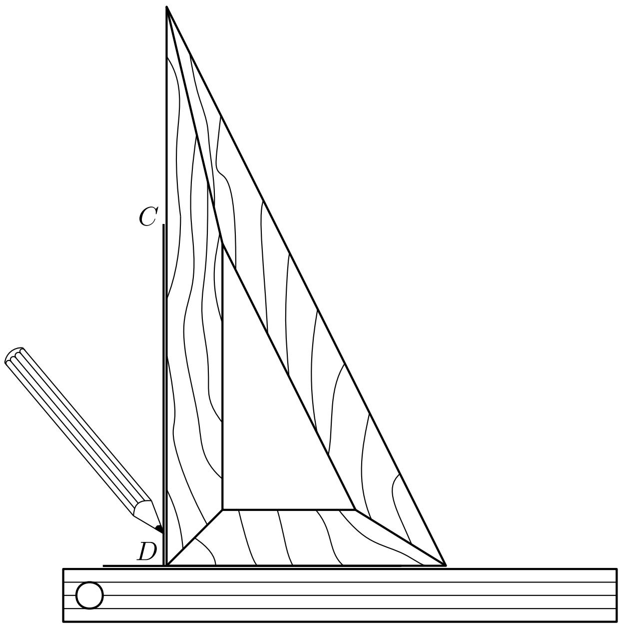
Чертеж 4.3. «Вилка» Гермеса.

4.4. Угольник. Измерение отрезков и углов

В техническом черчении необходимо быстро строить большое количество прямых углов и параллельных прямых. Для этих целей применяется такой прибор как *угольник*. Этот прибор представляет собой рамку, два ребра которой образуют прямой угол.

Если нужно восстановить перпендикуляр из точки D на прямой AB, то кладем линейку так, чтобы ее край сливался с прямой AB, затем прикладываем угольник так, чтобы ребро прямого угла плотно примыкало к ребру линейки. Двигаем угольник вдоль линейки до тех пор, пока край угольника не совпадет с точкой D. Проводим карандашом перпендикуляр. Таким же способом опускается перпендикуляр из точки C на прямую AB.

С помощью угольника и линейки также можно быстро



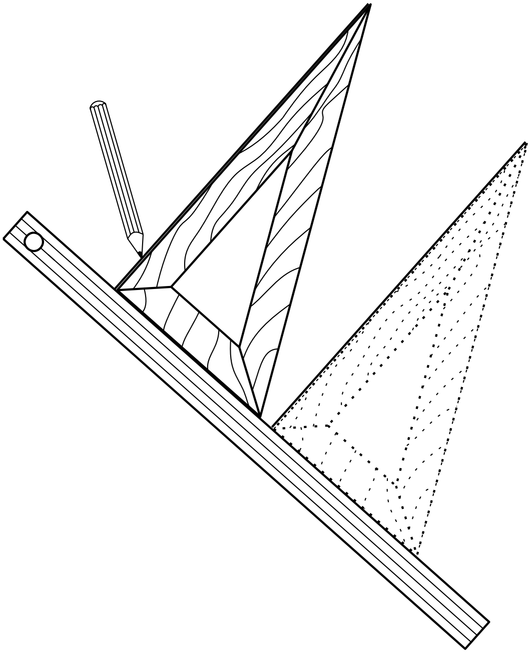
Чертеж 4.4. Проведение перпендикуляра с помощью угольника и линейки.

проводить прямые, параллельные данной. Для этого кладут угольник так, чтобы его одно ребро примыкало к данной прямой. К другому ребру приставляют линейку и плотно прижимают ее рукой к листу бумаги. Ведут угольник вдоль ребра линейки до тех пор, пока ребро угольника не совпадет с точкой, через которую нужно провести параллельную прямую. Прижимают угольник к листу бумаги и проводят карандашом параллельную. Стоит отметить, что не имеет значения, какое ребро мы примыкаем к прямой: при движении угольника по линейке угол между линейкой и угольником остается постоянным, значит, условие теоремы 1.24 на стр. 63 не нарушается.

Как мы помним, прямой угол является единой мерой для других углов. На практике необходимо измерять углы, которые больше или меньше прямого угла, а доля прямого угла является не совсем удобной величиной, с помощью которой можно выражать значения измеряемых углов. По этой причине за единицу меры углов также принимают угол, составляющий $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Угол этот называется *угловым градусом.*

Для измерения углов, меньших одного градуса, применяют меньшие единицы. Градус делят на 60 минут, минуту на 60 секунд. Слова «градус», «минута», «секунда» обозначают значками, проставленными справа от цифры. $55^0 12' 45''$ обозначает 55 градусов 12 минут 45 секунд. Угол величиной $2d$ равен 180^0, этот угол называют *развернутым.* Сумма внутренних углов треугольника равна 180^0. Угол равностороннего треугольника равен 60^0, а острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника — 45^0.

Измерение центральных углов на практике сводится к измерению соответствующих им дуг. Вся окружность содержит четыре прямых угла или 360 градусов. Из теоремы 2.12 на стр. 99 мы можем сказать, что центральный угол содержит столько угловых единиц, сколько соответствующая ему дуга содержит дуговых единиц. Найдя число, измеряющее дугу, мы найдем и центральный угол. Дуга, соответствующая угловому градусу,



Чертеж 4.5. Проведение параллельной прямой.

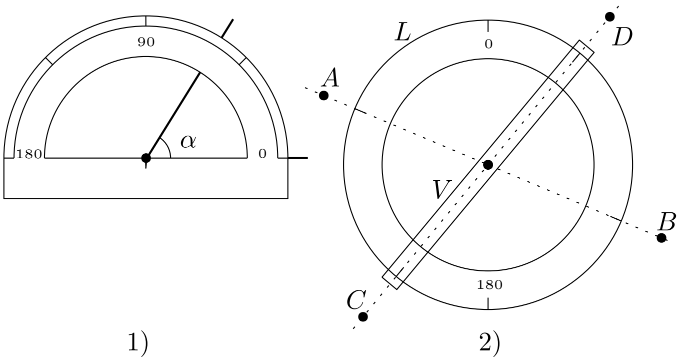
принимается за единицу меры дуг[5] и называется дуговым градусом.

На этих положениях основывается устройство *транспортира* — прибора для измерения углов. Транспортир представляет собой полукруг, на который нанесена градусная сетка с шагом в 1^0. Чтобы измерить угол α, мы приставляем транспортир так, чтобы его центр совпал с вершиной угла, а внутренний край линейки совместился со стороной угла. Смотрим, в какой

[5]Напомним, что эту меру мы можем применять только для измерения дуг окружности одного радиуса.

точке другая сторона угла пересечет дугу транспортира. Число градусов, заключающееся на транспортире между сторонами угла, покажет нам его величину (см. черт. 4.6(1)).

Докажите, что угол, заключенный между хордами, пере-



Чертеж 4.6. Измерение углов.

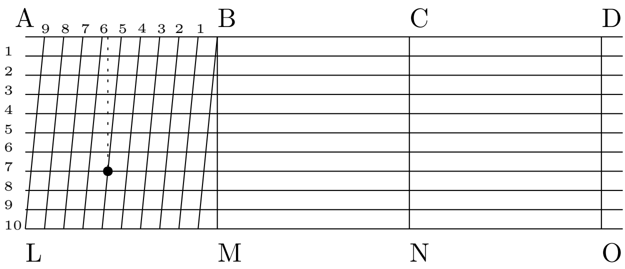
секающимися внутри окружности, измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.[6] На этом свойстве хорд основано устройство угломерных приборов (см. черт. 4.6(2)), где угол между направлениями AB и CD измеряется числом градусов (минут и секунд), пройденных алидадой[7] или визирной трубкой V по лимбу L от одного направления до другого. На лимб нанесена градусная сетка. Так как визирную трубку практически невозможно укрепить точно по центру лимба, то дуга, пройденная одним ее концом, не дает

[6]Соедините такие концы хорд, чтобы рассматриваемый угол стал внешним к полученному треугольнику.

[7]Алидада в простейшем варианте представляет собой обычную линейку, на концах которой под прямым углом закреплены диоптры. Это две медные планки, в каждой из которых внизу и вверху сделаны два прореза: один узкий, а другой более широкий; в более широком натянут волос. При этом широкий прорез на одной планке находится внизу, а на другой — вверху.

точной меры угла между направлениями. Точной мерой будет полусумма дуг, пройденных обоими концами.

На свойствах подобных треугольников основано черчение

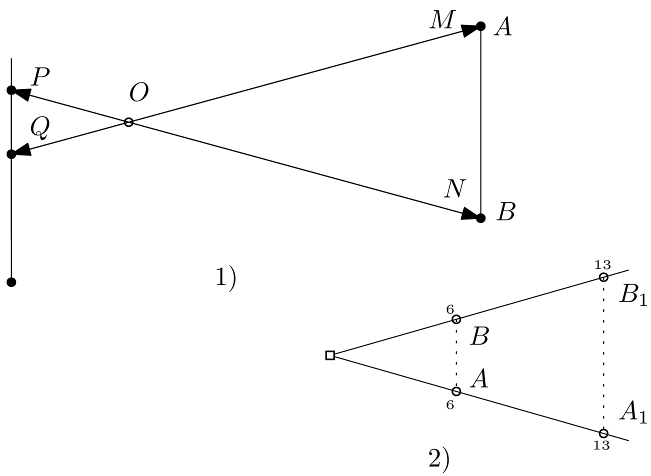


Чертеж 4.7. Масштаб.

масштаба. Он служит для того, чтобы можно было начертить отрезок в меньшем виде, или по длине начерченного отрезка можно было определить длину того отрезка, который изображает начерченный. Единица длины масштаба устанавливается в определенном соотношении с изображаемой единицей длины, такой как метр, километр, миля и так далее. Масштаб представляет собой 11 параллельных линий, проведенных на расстоянии $\frac{1}{10}$ единицы длины масштаба. Параллельные линии пересечены перпендикулярами через каждую единицу масштаба. Первый из промежутков разделен на 10 равных частей как на первой, так и на последней из 11 параллельных (см. черт. 4.7). Точки деления соединены наклонными отрезками.

Для того, чтобы определить длину некоторого начерченного отрезка XY, то циркулем сперва «снимают» его величину. Затем два острия циркуля прикладывают к прямой AD на масштабе так, чтобы один конец совпал с одной из точек B, C или D, а другой конец оказался между точками A и B. Если одно острие циркуля находится в точке D, а второе острие — на отрезке AB между цифрами 6 и 5, то длина отрезка находится между $2\frac{5}{10}$ и $2\frac{6}{10}$ единиц длины масштаба. Чтобы определить длину измеряемого отрезка с точностью до сотых, то не меняя раствора циркуля, двигаем его вниз так, чтобы правый конец всегда шел по прямой DO, а левый конец оставался на одной параллели с правым концом. Движение прекращаем тогда, когда левый конец встретится с одной из наклонных линий масштаба. Когда это произойдет, тогда смотрим на ту цифру, на которую указывает параллель, на которой остановились два острия циркуля. В нашем случае это цифра 7. Значит, длина измеряемого отрезка равна $2\frac{57}{100}$ единиц длины масштаба.

Принцип работы следующих двух приборов также основан на свойствах подобных треугольников. На чертеже 4.8(1) схе-



Чертеж 4.8. Схематическое изображение делительного (1) и пропорционального (2) циркулей.

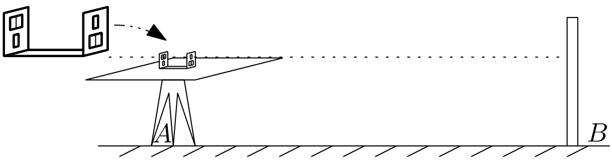
матически показано устройство делительного циркуля (*compas de reduction*). Он служит для деления известного отрезка на 2, 3, 4, ... 12 равных частей и состоит из двух равных ножек

QM и PN с заостренными концами. Вдоль каждой ножки сделаны прорезы, и в любом месте прореза ножки зажимаются накрест посредством подвижного винта O. Чтобы с помощью делительного циркуля найти пятую часть отрезка AB, то закрепляют винт O в таком месте, чтобы длина OM была в пять раз больше длины OQ. Затем ставят два конца циркуля M и N на концы отрезка AB, концы циркуля P и Q дадут нам длину искомого отрезка, равную $\frac{1}{5}AB$.

Пропорциональный циркуль (схематически изображен на чертеже 4.8(2)) служит для поиска отрезка, который к данному отрезку находился бы в заданном отношении. Пропорциональный циркуль (*compas de proportio*) состоит из двух равных линеек, соединенных шарниром. На линейках нанесен масштаб. Если мы желаем найти отрезок AB, который относился бы к отрезку A_1B_1 как $\frac{6}{13}$, то берем пропорциональным циркулем отрезок A_1B_1 так, чтобы его концы находились на делении 13, тогда концы искомого отрезка будут на делении 6.

4.5. Съемка плана местности

Съемку плана можно производить с помощью прибора, называемого мензулой. Мензула состоит из деревянной квадратной

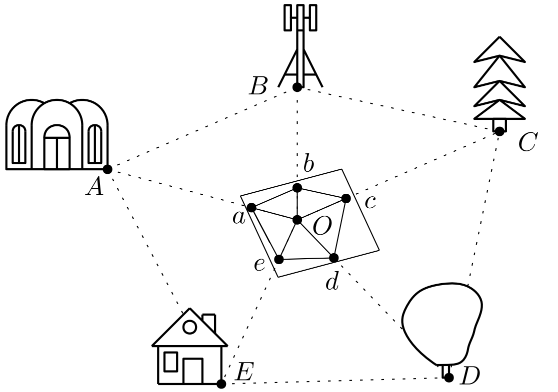


Чертеж 4.9. Определение направления к объекту B на местности с помощью алидады.

доски, которая закрепляется на треножнике. На доску наклеивается лист бумаги, на котором предполагается чертить план;

доска приводится в горизонтальное положение с помощью уровня. Чтобы начертить на мензуле линию по направлению какого-нибудь луча AB, находящегося на земле, применяют алидаду. Для этого ставят мензулу в точке A, на мензулу кладут алидаду так, чтобы один ее конец находился ровно над точкой A. В этот конец втыкают иголку и поворачивают алидаду так, чтобы она указывала в направлении луча AB, и по краю ее проводят прямую (см. черт. 4.9).

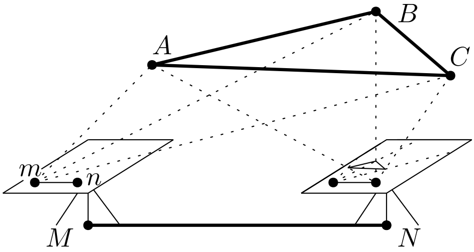
Если надо снять план местности $ABCDE$, то на местности



Чертеж 4.10. Съемка плана местности с помощью мензулы.

выбирают точку O так, чтобы можно было измерить расстояние от нее до вершин многоугольника $ABCDE$ (см. черт. 4.10). На местности измеряют расстояния от точки O до вершин многоугольника $ABCDE$ (в качестве вершин выбираются углы зданий, углы дорог и площадок, столбы, деревья, колодцы и тому подобное), ставят мензулу в точке O, с помощью алидады проводят прямые по направлениям к вершинам многоугольника, и откладывают отрезки Oa, Ob, Oc, Od, Oe, согласно выбранному масштабу. Построенный многоугольник $abcde$ и будет представлять план местности.

Существует и второй способ съемки плана местности. Для



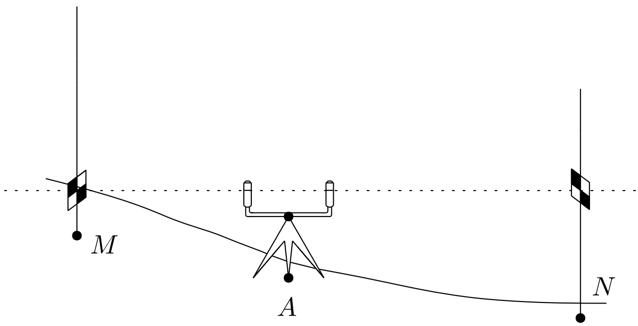
Чертеж 4.11. Съемка плана местности с помощью мензулы и базиса.

этого на местности выбирается отрезок MN в качестве базиса. В соответствующем масштабе к отрезку MN на мензуле отмечается отрезок mn. Мензула размещается на местности в точке M; в точку m ставится алидада, и из этой точки проводятся прямые по направлению к точкам местности A, B и C (см. черт. 4.11). Далее мензула переставляется в точку N, и прямые тогда проводятся из точки n по направлению к точкам A, B и C. Пересечения построенных прямых дадут нам точки местности на плане.

4.6. Нивелирование местности

Нивелировать какую-нибудь местность — значит определить расстояния ее наиболее замечательных точек от некоторой определенной горизонтальной плоскости. Для этих целей применяют нивелир. Этот прибор состоит из медной трубки, к концам которой под прямым углом приделаны стеклянные трубки. В эти трубки наливается вода, которая занимает в них положение одного уровня, так как они сообщаются друг с другом через медную трубку.

Если нужно определить высоту точки M над точкой N (см. черт. 4.12), то один наблюдатель ставит нивелир в промежуточной точке A, а другой вертикально ставит в точке N рейку со шкалой. По рейке движется доска, состоящая из двух белых и двух черных квадратов, общая вершина которых называется целью. Первый наблюдатель смотрит на нивелир, а второй двигает цель на шесте до тех пор, пока она не окажется на одной прямой с уровнем нивелира. Записывается высота цели в точке N. Нивелир не трогается. Шест переносится в точку M и повторяется та же операция, что и для точки N. Записывается высота цели в точке M. Разность обеих высот и даст высоту точки M над N. Последовательно перемещая нивелир из одной точки в другую, мы можем выполнить нивелирование требуемой нам местности и получить ее профиль по высоте.[8]



Чертеж 4.12. Нивелирование.

[8]Предлагаемый курс не свободен от ошибок и недостатков. Составитель с благодарностью примет добросовестную критику на электронный почтовый ящик *planimetry* @ *stepanov* · *top*.

Оглавление